# 106 學年度全國高級中學
# 指定科目模擬考試

# 數學甲

—作答注意事項—

考試範圍：第一～四冊全、選修數學甲全

考試時間：80 分鐘

作答方式：
- 選擇(填)題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液(帶)。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\underset{\square}{3}$ 與第 19 列的 $\underset{\square}{8}$ 畫記，如：

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | − | ± |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 19 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | □ |

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\underset{\square}{-}$ 與第 21 列的 $\underset{\square}{7}$ 畫記，如：

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | − | ± |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | ■ | □ |
| 21 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | □ | □ |

祝考試順利

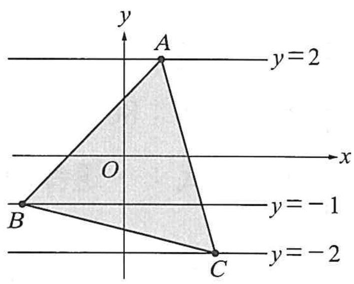
99362803-26

# 第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 72 分）

## 一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 已知正△$ABC$ 的三個頂點 $A$、$B$、$C$ 分別在直角坐標平面的三條水平線 $y=2$、$y=-1$、$y=-2$ 上，如右圖所示，試問正△$ABC$ 的面積為多少平方單位？




(1) $2\sqrt{3}$ 平方單位
(2) $\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$ 平方單位
(3) $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ 平方單位
(4) $4\sqrt{3}$ 平方單位
(5) $5\sqrt{3}$ 平方單位

2. 依牛頓冷卻定律，將一溫度 $T_0$ ℃ 的物體，放進溫度恆為 $T_1$ ℃ 的環境時，經過時間 $t$ 小時後，物體的溫度為 $T(t)=T_1+(T_0-T_1)\times e^{-kt}$，其中常數 $k$ 與物體性質有關，若依過去的經驗：一條吳郭魚從冰箱冷凍庫 ($-4$ ℃) 拿出來在室溫 26 ℃ 下解凍，30 分鐘後，其溫度約為 6 ℃，今阿明師在烹調時想要保持魚肉的美味度，要在魚溫度 16 ℃ 時烹調，試問阿明師大約在烹調魚的多久時間前，將魚從冷凍庫拿出來解凍最佳？(已知 $\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$e$ 為數學常數約為 2.718)
(1) 50 分鐘
(2) 1 小時 20 分鐘
(3) 1 小時 50 分鐘
(4) 2 小時 20 分鐘
(5) 2 小時 50 分鐘

3. 已知 $a$，$b$ 均為實數，圓 $C$：$x^2+y^2+ax-4y+3=0$ 與直線 $L$：$y=1-3x$ 相切於 $(0,b)$，試求圓 $C$ 的半徑為多少？

(1) 2

(2) 3

(3) $\sqrt{10}$

(4) 4

(5) $2\sqrt{5}$

## 二、多選題（占 24 分）

說明：第 4 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 設 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，其中 $a$、$b$、$c$ 均為實數，若 $f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$ 且 $\alpha<\beta$，則下列選項中哪些正確？

(1) $f(\alpha)<f(\beta)$

(2) $a^2-3b>0$

(3) 函數 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 處有反曲點

(4) 若方程式 $f(x)=0$ 恰有一實根，則 $f(\alpha)f(\beta)<0$

(5) 若 $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{x-\alpha}$ 存在，則方程式 $f(x)=0$ 有二重根

5. 設 $f(x)=\sin 2x+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$，則下列選項中哪些正確？

(1) $f(x)$ 的週期為 $\pi$

(2) $f(x)$ 的最大值為 $\sqrt{2}$

(3) $y=f(x)$ 的圖形可以由 $y=\sin 2x$ 之圖形向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 而得

(4)方程式 $x^2=\sin 2x+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$ 有兩實數解

(5)若 $-\pi<x<\pi$，則 $\sin 2x+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)=\tan x$ 有兩實數解

6. $A$、$B$ 為兩個二階方陣，方陣中每一個位置的元素皆為實數，就二階方陣所對應的平面變換來說，$A$ 在平面上的作用是對直線 $L$：$y=2x$ 的鏡射，且知 $AB=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，則下列選項中哪些正確？

(1) $A=\begin{bmatrix}\dfrac{3}{5} & -\dfrac{4}{5}\\ \dfrac{4}{5} & \dfrac{3}{5}\end{bmatrix}$

(2) $A^{-1}=A$

(3) $B=\begin{bmatrix}\dfrac{4}{5} & \dfrac{3}{5}\\ -\dfrac{3}{5} & \dfrac{4}{5}\end{bmatrix}$

(4) $B$ 所對應的平面變換為旋轉

(5)點 $P(4,3)$ 對直線 $L$ 鏡射後的對應點 $P'$ 坐標為 $(0,5)$

## 三、選填題（占 30 分）

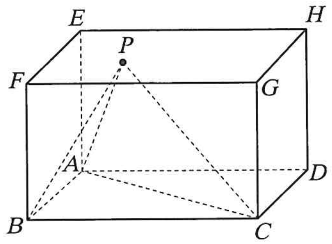
| |
|---|
| 說明：1.第 A 至 E 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(7－18)。<br>2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。 |

A. 若兩多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 滿足

$$2f(x)+g(x)=3\times\frac{(x-\sqrt{3})(x-1)}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-1)}+2\times\frac{(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)}+4\times\frac{(x-1)(x-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})},$$

且已知 $g(x)$ 除以 $x+2$ 的餘式為 $-9$，則 $f(x)$ 除以 $x+2$ 的餘式為 ⑦ 。

B. 如右圖，$ABCD-EFGH$ 為一長方體，$P$ 點位於平面 $EFGH$ 上，已知 $\overline{PA}=\overline{PB}=7$，且 $\overline{PC}=\sqrt{69}$ ，$\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=10$，則四面體 $P-ABC$ 的體積為 ⑧⑨$\sqrt{⑩}$ 立方單位。(化為最簡根式)



C. 直角坐標平面上，原點為 $O$，已知 $A(3,4)$，令 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{OP}$，且 $\overrightarrow{p}\perp(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{p})$，則 $|\overrightarrow{p}|\times|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{p}|$ 的最大值為 $\underline{\dfrac{⑪⑫}{⑬}}$。(化為最簡分數)

D. 已知兩非零複數 $z_1$、$z_2$ 滿足 $z_1^{\ 2}+z_1z_2+z_2^{\ 2}=0$，則 $\left(\dfrac{z_2}{z_1}-1\right)^4+3\left(\dfrac{z_2}{z_1}-1\right)^3+3\left(\dfrac{z_2}{z_1}-1\right)^2+5=$ $\underline{\quad ⑭ \quad}$。

E. 若函數 $f(x)=\int_0^x\left(\dfrac{1}{3}t^2+2at+b\right)dt$ 在 $x=-2$ 有極值且 $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=4$，則數對 $(a,b)=$ $\underline{\left(⑮\ ,\ \dfrac{⑯⑰}{⑱}\right)}$。(化為最簡分數)

## 第貳部分：非選擇題（占 28 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、某重複試驗每次成功的機率為 $p$，失敗的機率為 $1-p$，今連續做 2 次試驗，其中隨機變數 $X$ 表示成功的次數，若已知 $P(X\geq 1)=\dfrac{8}{9}$，試問：

(1) 成功的機率 $p$ 值為多少？(4 分)

(2) 2 次重複試驗的數學期望值 $E(X)$ 為多少？(4 分)

(3) 若欲使得此試驗中至少成功一次的機率大於 0.99，則至少需做幾次試驗？(6 分)
(已知 $\log 3 \approx 0.4771$)

二、已知 $a$，$b$ 均為大於 0 的整數，設直線 $y=a^{\frac{1}{6}}x$ 與曲線 $y=b^{-\frac{1}{4}}x^2$ 在直角坐標平面上的圖形所圍成的區域面積為 $S(a\,,b)$ 平方單位：

(1) 試求 $S(a\,,b)$ 之值。（以 $a$，$b$ 表示）(6 分)

(2) 設 $n$ 為自然數，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}S(k,k+1)$ 之值。(8 分)

# 106 學年度全國高級中學

# 指定科目模擬考試

# 數學甲參考答案暨詳解

翰林出版事業股份有限公司

99362817-26

# 數學考科詳解

| 題號 | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | (2) | (2) | (3) | (2)(3)(5) | (1)(3)(4)(5) | (2)(4)(5) | | | |

**第壹部分：選擇題**

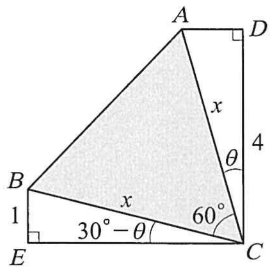
**一、單選題**

1. (2)

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：三角函數的基本定義、和角公式

解析：已知$\angle ACB=60^\circ$




令正$\triangle ABC$的邊長為$x$，

過$C$點作鉛直線交$y=2$於點$D$

再過$B$點作鉛直線交$y=-2$於點$E$

設$\angle ACD=\theta$，則$\angle BCE=30^\circ-\theta$

在$\triangle ACD$中，$\cos\theta=\dfrac{4}{x}$，

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{x^2-16}}{x}$$

又$\sin(30^\circ-\theta)=\sin 30^\circ\cos\theta-\cos 30^\circ\sin\theta$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{x}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x}$

$\Rightarrow 2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x^2-16}=1$

得$x^2=\dfrac{52}{3}$

$\therefore$正$\triangle ABC$的面積為$\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2=\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$(平方單位)

故選(2)。

2. (2)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指數、對數的基本運算

解析：依題意得知

$6=26+(-4-26)\times e^{-\frac{1}{2}k}$

$\Rightarrow -20=-30\times e^{-\frac{1}{2}k}$

$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}k}=\dfrac{2}{3}$

而$16=26+(-4-26)\times e^{-kt}$

$\Rightarrow -10=-30\times\left(e^{-\frac{1}{2}k}\right)^{2t}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2t}$

兩邊取對數得

$\log\dfrac{1}{3}=\log\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2t}$

$\Rightarrow -\log 3=2t(\log 2-\log 3)$

$\Rightarrow -0.4771=2t(0.3010-0.4771)$

得$t\approx 1.35$小時，約為1小時20分鐘

故選(2)。

3. (3)

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉、第三冊第三章〈平面向量〉

目標：利用圓方程式及點到直線的距離求得半徑

解析：將 $x^2+y^2+ax-4y+3=0$ 配方成 $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(y-2)^2=1+\frac{a^2}{4}$

可知圓心 $\left(-\frac{a}{2}, 2\right)$ 到切線 $L: 3x+y-1=0$ 的距離為半徑 $r$

則

$$r=\frac{\left|3\times\left(-\frac{a}{2}\right)-1+2\right|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(1-\frac{3a}{2}\right)^2}{10}=1+\frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow 1-3a+\frac{9}{4}a^2=10+\frac{5a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4}+3a+9=0$$

$$\Rightarrow a^2+12a+36=0$$

$$\Rightarrow (a+6)^2=0$$

$$\Rightarrow a=-6$$

則 $r=\sqrt{1+\frac{(-6)^2}{4}}=\sqrt{10}$

故選(3)。

## 二、多選題

4. (2)(3)(5)

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：多項式函數微分的應用

解析：(1) ╳：$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

且 $f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$，$\alpha<\beta$

$\Rightarrow f(x)$ 的圖形如右圖

$\therefore f(\alpha)>f(\beta)$

(2) ○：$f'(x)=3x^2+2ax+b=0$ 有兩相異實根 $\alpha$，$\beta$

$\Rightarrow (2a)^2-4\times3b>0$，得 $a^2-3b>0$

(3) ○：$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$

$=3x^2-3(\alpha+\beta)x+3\alpha\beta$

$\Rightarrow f''(x)=6x-3(\alpha+\beta)=0$

得 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\therefore f(x)$ 在 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ 處有反曲點

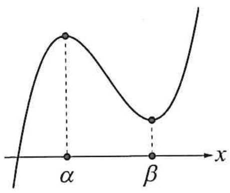
(4) ╳：如右圖(一)、右圖(二)

$\therefore$ 若 $f(x)=0$ 恰有一實根，則 $f(\alpha)f(\beta)>0$

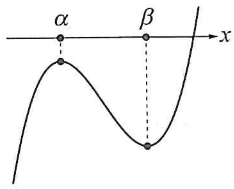
(5) ○：若 $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{x-\alpha}$ 存在，則圖形如右圖(三)

$\therefore$ 若 $f(x)=0$ 在 $x=\alpha$ 有二重根

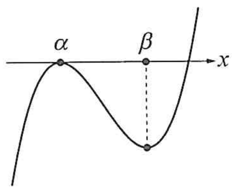
故選(2)(3)(5)。




圖(一)




圖(二)




圖(三)

5. (1)(3)(4)(5)

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：三角函數的應用

解析：$f(x)=\sin 2x+\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\sin 2x+\sin\frac{\pi}{3}\cos 2x-\cos\frac{\pi}{3}\sin 2x$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

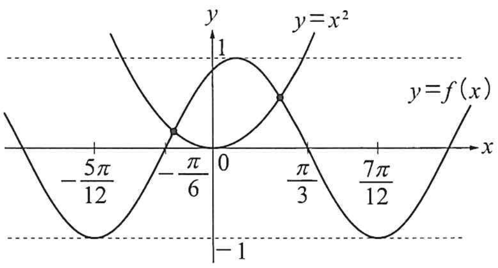
(1) ○：$f(x)$ 的週期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

(2) ╳：$-1\leq\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leq 1$

$\therefore f(x)$ 的最大值為 1

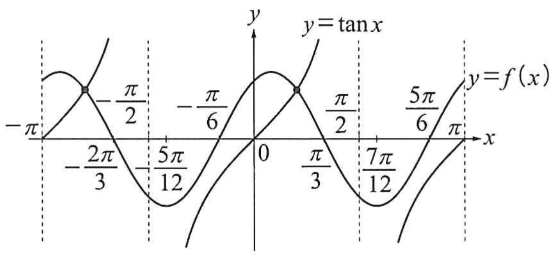
(3) ○：$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$ 之圖形可以由 $y=\sin 2x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 而得

(4) ○：作圖如下




$\therefore x^2=\sin 2x+\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$ 有兩實數解

(5) ○：作圖如下




共兩個實數解

故選(1)(3)(4)(5)。

6. (2)(4)(5)

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：二階方陣的平面變換及其應用

解析：(1) ╳：$\because$ 直線 $L$：$y=2x$ $\quad\therefore\tan\frac{\theta}{2}=2$

由三角函數中得知

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=-\frac{3}{5}，\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

(2) ○：$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}=A$

(3) ╳：$AB=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow B=A^{-1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$

(4) ○：$B=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$，其中 $\cos\varphi=\frac{4}{5}$，$\sin\varphi=\frac{3}{5}$

故 $B$ 所對應的平面變換為旋轉

(5) ○：設 $P'(x', y')$ 為 $P$ 對直線 $L$ 鏡射後的對應點，則

$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix}$ $\therefore P'$ 坐標為 $(0, 5)$

故選(2)(4)(5)。

## 三、選填題

A. 7

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：拉格朗日插值法及餘式定理的應用

解析：依題意得知 $2f(x)+g(x)$ 為二次式且

$2f(\sqrt{2})+g(\sqrt{2})=3$，$2f(1)+g(1)=2$，$2f(\sqrt{3})+g(\sqrt{3})=4$

$\therefore 2f(x)+g(x)=x^2+1$

令 $x=-2$ 代入得

$2f(-2)+g(-2)=(-2)^2+1\Rightarrow 2f(-2)-9=5$

$\therefore f(-2)=7$

故 $f(x)$ 除以 $x+2$ 的餘式為 7。

B. $20\sqrt{6}$

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：空間坐標化、兩點距離公式、空間直角坐標系，並利用兩點距離公式求出坐標點

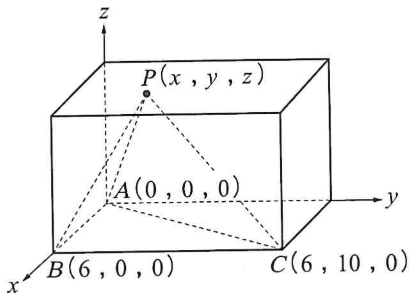
解析：以 $A$ 為原點，$\overleftrightarrow{AB}$ 、 $\overleftrightarrow{AD}$ 、 $\overleftrightarrow{AE}$ 為 $x$、$y$、$z$ 軸建立空間坐標系

設 $P$ 坐標 $(x, y, z)$、$A(0, 0, 0)$、$B(6, 0, 0)$、$C(6, 10, 0)$，則

$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=49\\ (x-6)^2+y^2+z^2=49\\ (x-6)^2+(y-10)^2+z^2=69\end{cases}$

解得 $(x, y, z)=(3, 4, 2\sqrt{6})$

$\therefore$四面體 $P-ABC$ 的體積為 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times10\times2\sqrt{6}=20\sqrt{6}$ 。

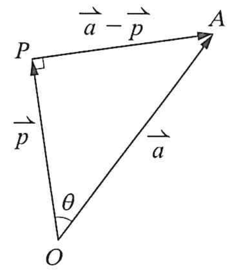


C. $\dfrac{25}{2}$

出處：第三冊第三章〈平面向量〉、第三冊第一章〈三角〉

目標：向量的垂直、三角函數的基本定義

解析：$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}=(3,4)\Rightarrow|\overrightarrow{a}|=5$




$\because\overrightarrow{p}\perp(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{p})\quad\therefore\overline{OP}\perp\overline{AP}$

令$\angle AOP=\theta$，則

$|\overrightarrow{p}|=|\overrightarrow{a}|\cos\theta$，$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{p}|=|\overrightarrow{a}|\sin\theta$

$\Rightarrow|\overrightarrow{p}|\times|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{p}|=(|\overrightarrow{a}|\cos\theta)\times(|\overrightarrow{a}|\sin\theta)$

$=|\overrightarrow{a}|^2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{a}|^2\sin2\theta$

當 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 時，$|\overrightarrow{p}|\times|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{p}|$有最大值 $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{a}|^2=\dfrac{1}{2}\times5^2=\dfrac{25}{2}$ 。

D. 5

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉、第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：複數的認知、多項式的除法原理

解析：$\because z_1^2+z_1z_2+z_2^2=0\Rightarrow1+\dfrac{z_2}{z_1}+\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^2=0$

令 $\dfrac{z_2}{z_1}=\omega$ 得 $1+\omega+\omega^2=0\quad\therefore\omega^3=1$

設 $x=\omega-1\Rightarrow(x+1)^3=\omega^3\Rightarrow x^3+3x^2+3x+1=1$

即 $x^3+3x^2+3x=0$

而 $x^4+3x^3+3x^2+5=x(x^3+3x^2+3x)+5$

$\therefore\left(\dfrac{z_2}{z_1}-1\right)^4+3\left(\dfrac{z_2}{z_1}-1\right)^3+3\left(\dfrac{z_2}{z_1}-1\right)^2+5=5$。

E. $\left(6,\dfrac{68}{3}\right)$

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：多項式函數定積分、三次多項式極值

解析：$f(x)=\int_0^x\left(\dfrac{1}{3}t^2+2at+b\right)dt$

$=\dfrac{1}{9}x^3+ax^2+bx$

$f'(x)=\dfrac{1}{3}x^2+2ax+b$

$\because f(x)$ 在 $x=-2$ 處有極值 $\Rightarrow f'(-2)=\dfrac{4}{3}-4a+b=0$

$\Rightarrow12a-3b=4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$

又 $\int_{-1}^1f(x)dx=\int_{-1}^1\left(\dfrac{1}{9}x^3+ax^2+bx\right)dx$

$=\left(\dfrac{1}{36}x^4+\dfrac{1}{3}ax^3+\dfrac{1}{2}bx^2\right)\Big|_{-1}^{1}$

$=\dfrac{2}{3}a=4$

$\therefore a=6$ 代入$(*)$得 $b=\dfrac{68}{3}$

故數對 $(a,b)=\left(6,\dfrac{68}{3}\right)$。

## 第貳部分：非選擇題

一、(1) $\dfrac{2}{3}$；(2) $\dfrac{4}{3}$；(3) 5 次

出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：重複試驗

解析：(1) 隨機變數 $X$ 表示 2 次試驗中成功的次數，即 $X=0$，1 或 2

$$P(X \geq 1)=P(X=1)+P(X=2)=C_1^2 p(1-p)+C_2^2 p^2=\frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow 2p(1-p)+p^2=\frac{8}{9} \Rightarrow 9p^2-18p+8=0 \Rightarrow (3p-2)(3p-4)=0$$

$$\therefore p=\frac{2}{3} \text{ 或 } \frac{4}{3}(\text{不合})。$$

(2) $E(X)=np=2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$。

(3) 設至少需做 $n$ 次試驗才能使得至少成功一次的機率大於 0.99，則

$$1-\left(1-\frac{2}{3}\right)^n>0.99 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n<0.01$$

兩邊取對數得 $\log\left(\dfrac{1}{3}\right)^n<\log 0.01$

$$\Rightarrow -n\log 3<-2 \Rightarrow n>\frac{-2}{-\log 3} \approx 4.19$$

故至少需做 5 次試驗。

二、(1) $\dfrac{1}{6}\sqrt{ab}$；(2) $\dfrac{1}{12}$

出處：選修數學甲(下)第一章〈極限與函數〉、選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：積分公式求面積、夾擠定理

解析：(1)
$$\begin{cases} y=a^{\frac{1}{6}}x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ y=b^{-\frac{1}{4}}x^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases} \Rightarrow a^{\frac{1}{6}}x=b^{-\frac{1}{4}}x^2 \Rightarrow b^{-\frac{1}{4}}x^2-a^{\frac{1}{6}}x=0 \Rightarrow x\left(b^{-\frac{1}{4}}x-a^{\frac{1}{6}}\right)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 或 } a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{4}}$$

$$S(a,b)=\int_0^{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{4}}}\left(a^{\frac{1}{6}}x-b^{-\frac{1}{4}}x^2\right)dx=\left(\frac{1}{2}a^{\frac{1}{6}}x^2-\frac{1}{3}b^{-\frac{1}{4}}x^3\right)\Bigg|_0^{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{6}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}\sqrt{ab}。$$

(2)
$$\sum_{k=1}^{n}S(k,k+1)=\frac{1}{6}\sqrt{1\times2}+\frac{1}{6}\sqrt{2\times3}+\cdots\cdots+\frac{1}{6}\sqrt{n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots\cdots+\sqrt{n(n+1)}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}S(k,k+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n^2}\left(\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots\cdots+\sqrt{n(n+1)}\right)$$

而 $\dfrac{1}{6n^2}\left(\sqrt{1\times1}+\sqrt{2\times2}+\cdots\cdots+\sqrt{n\times n}\right) \leq \dfrac{1}{6n^2}\left(\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots\cdots+\sqrt{n(n+1)}\right)$

$$\leq \frac{1}{6n^2}\left(\sqrt{2\times2}+\sqrt{3\times3}+\cdots\cdots+\sqrt{(n+1)(n+1)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6n^2}(1+2+\cdots\cdots+n) \leq \frac{1}{6n^2}\left(\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots\cdots+\sqrt{n(n+1)}\right) \leq \frac{1}{6n^2}(2+3+\cdots\cdots+(n+1))$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{12n} \leq \frac{1}{6n^2}\left(\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots\cdots+\sqrt{n(n+1)}\right) \leq \frac{n+3}{12n}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{12n}=\frac{1}{12} \text{ 且 } \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{12n}=\frac{1}{12}$$

由夾擠定理得知 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}S(k,k+1)=\frac{1}{12}$。

# 非選擇題批改原則

**第貳部分：非選擇題**

一、(1) $\dfrac{2}{3}$ ；(2) $\dfrac{4}{3}$ ；(3) 5 次

出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：重複試驗

解析：(1) 隨機變數 $X$ 表示 2 次試驗中成功的次數，即 $X=0$，1 或 2

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)=C_1^2 p(1-p)+C_2^2 p^2=\frac{8}{9}\quad (2\text{ 分})$$

$$\Rightarrow 2p(1-p)+p^2=\frac{8}{9}\Rightarrow 9p^2-18p+8=0\Rightarrow (3p-2)(3p-4)=0$$

$$\therefore p=\frac{2}{3}\text{ 或 }\frac{4}{3}(\text{不合})。\quad (2\text{ 分})$$

(2) $E(X)=np=2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$。 (4 分)

(3) 設至少需做 $n$ 次試驗才能使得至少成功一次的機率大於 0.99，則

$$1-\left(1-\frac{2}{3}\right)^n>0.99\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^n<0.01\quad (2\text{ 分})$$

兩邊取對數得 $\log\left(\dfrac{1}{3}\right)^n<\log 0.01$

$$\Rightarrow -n\log 3<-2\Rightarrow n>\frac{-2}{-\log 3}\approx 4.19$$

故至少需做 5 次試驗。 (4 分)

二、(1) $\dfrac{1}{6}\sqrt{ab}$ ；(2) $\dfrac{1}{12}$

出處：選修數學甲(下)第一章〈極限與函數〉、選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：積分公式求面積、夾擠定理

解析：(1) $\begin{cases} y=a^{\frac{1}{6}}x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots① \\ y=b^{-\frac{1}{4}}x^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots② \end{cases}\Rightarrow a^{\frac{1}{6}}x=b^{-\frac{1}{4}}x^2\Rightarrow b^{-\frac{1}{4}}x^2-a^{\frac{1}{6}}x=0\Rightarrow x\left(b^{-\frac{1}{4}}x-a^{\frac{1}{6}}\right)=0$

$$\therefore x=0\text{ 或 }a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{4}}\quad (2\text{ 分})$$

$$S(a,b)=\int_0^{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{4}}}\left(a^{\frac{1}{6}}x-b^{-\frac{1}{4}}x^2\right)dx=\left.\left(\frac{1}{2}a^{\frac{1}{6}}x^2-\frac{1}{3}b^{-\frac{1}{4}}x^3\right)\right|_0^{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{6}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}\sqrt{ab}。\quad (4\text{ 分})$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}S(k,k+1)=\frac{1}{6}\sqrt{1\times2}+\frac{1}{6}\sqrt{2\times3}+\cdots\cdots+\frac{1}{6}\sqrt{n(n+1)}$

$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots\cdots+\sqrt{n(n+1)}\right)\quad (2\text{ 分})$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}S(k,k+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n^2}\left(\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots\cdots+\sqrt{n(n+1)}\right)$$

而 $\dfrac{1}{6n^2}\left(\sqrt{1\times1}+\sqrt{2\times2}+\cdots\cdots+\sqrt{n\times n}\right)\leq\dfrac{1}{6n^2}\left(\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots\cdots+\sqrt{n(n+1)}\right)$

$$\leq\frac{1}{6n^2}\left(\sqrt{2\times2}+\sqrt{3\times3}+\cdots\cdots+\sqrt{(n+1)(n+1)}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{6n^2}(1+2+\cdots\cdots+n)\leq\frac{1}{6n^2}\left(\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots\cdots+\sqrt{n(n+1)}\right)\leq\frac{1}{6n^2}(2+3+\cdots\cdots+(n+1))$$

$$\Rightarrow\frac{n+1}{12n}\leq\frac{1}{6n^2}\left(\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots\cdots+\sqrt{n(n+1)}\right)\leq\frac{n+3}{12n}\quad (4\text{ 分})$$

$$\because\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{12n}=\frac{1}{12}\text{ 且 }\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{12n}=\frac{1}{12}$$

由夾擠定理得知 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}S(k,k+1)=\frac{1}{12}$。 (2 分)