

# 全國公私立高級中學

## 107 學年度學科能力測驗第四次聯合模擬考試

考試日期：107 年 12 月 20~21 日

### 數學考科

#### — 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 7 題，多選題 5 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{18}{19}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生必

須分別在答案卡上的第 18 列的  $\frac{3}{19}$  與第 19 列的  $\frac{8}{19}$  畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{20(21)}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答案

卡的第 20 列的  $\frac{-}{50}$  與第 21 列的  $\frac{7}{50}$  畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>					

※ 試題後附有參考公式及可能用到的數值

### 第壹部分：選擇題（占 60 分）

#### 一、單選題（占 35 分）

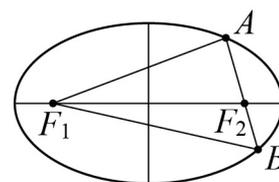
說明：第 1 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 某次數學考試，全班平均 45 分，標準差 15 分。老師決定用線性函數的方式調整全班的分數。伸縮和平移的量皆為正數，平均提高到 60 分，標準差降到 10 分，且沒有人調整後的成績低於 0 分及高於 100 分。若有一位同學原來考 60 分，調整後變多少分？

- (1) 65
- (2) 68
- (3) 70
- (4) 72
- (5) 75

2. 有一橢圓如圖(1)， $F_1$  和  $F_2$  為橢圓兩焦點，短軸長 6， $\overline{F_1F_2} = 8$ ， $A$ 、 $B$  在橢圓上，則  $\triangle AF_1B$  周長為？

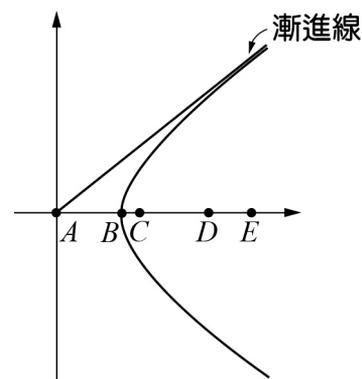
- (1) 10
- (2) 20
- (3)  $4\sqrt{13}$
- (4)  $8\sqrt{13}$
- (5)  $10 + 4\sqrt{13}$



圖(1)

3. 如圖(2)為雙曲線的一部分，試問哪一個點最有可能為此雙曲線的焦點？

- (1)  $A$
- (2)  $B$
- (3)  $C$
- (4)  $D$
- (5)  $E$



圖(2)

4. 小明存錢，第一天存 1 元，第二天存 2 元，第三天存 4 元，……，第  $n$  天存  $2^{n-1}$  元，……，第三十天存  $2^{29}$  元，試問小明存了三十天後總金額最接近下列哪一個選項？
- (1) 1 仟萬元
  - (2) 1 億元
  - (3) 10 億元
  - (4) 50 億元
  - (5) 100 億元
5. 小明在足球比賽中，每次起腳射門可以得分的機率為  $\frac{2}{3}$ 。求小明至少起腳射門多少次，才可以讓他至少得一分的機率超過 0.99？( $\log 3 \doteq 0.4771$ )
- (1) 5
  - (2) 6
  - (3) 7
  - (4) 8
  - (5) 9
6. 方程式  $x^3 - 2x^2 - 3x - 4 = 0$  三根為  $\alpha, \beta, \gamma$ ，則  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$  的值為？
- (1) 6
  - (2) 10
  - (3) 16
  - (4) 20
  - (5) 26

7. 小明到自助餐店吃飯都固定選一個主食、一個主菜和一個配菜。其中主食有白飯、紫米飯、粥、炒飯四種選擇；主菜有雞腿、排骨、魚三種選擇；配菜有荷包蛋、高麗菜兩種選擇。小明跟自助餐阿姨說：「我討厭吃紫米飯配荷包蛋，而且吃雞腿就一定配白飯，現在開始我天天來吃一次。」求小明要吃幾天才可以把所有搭配都吃過一遍？
- (1) 16 (2) 18  
(3) 20 (4) 24  
(5) 25

## 二、多選題（占25分）

說明：第8題至第12題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得5分；答錯1個選項者，得3分；答錯2個選項者，得1分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

8. 矩陣  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B = A^{-1}$ ， $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ，請選出正確的選項。

- (1)  $\det(A) = 7$  (2)  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$   
(3)  $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$  (4)  $A+3C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$   
(5)  $A \cdot C = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$

9. 坐標平面上有一圓  $C : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$  及兩條直線  $L_1 : x-y=0$ ， $L_2 : 2x+y=3$ ，請選出正確的選項。
- (1)  $L_1$  和  $L_2$  相交於一點，交點坐標為  $(1, -1)$   
(2)  $L_1$  和  $C$  相切  
(3)  $L_1$  和  $C$  的交點坐標為  $(0, 0)$   
(4)  $C$  的圓心和  $L_2$  的距離為  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$   
(5) 若  $L_2$  和  $C$  相交於  $A$ 、 $B$  兩點則  $\overline{AB} = \frac{\sqrt{30}}{5}$

10. 實係數多項式  $f(x)$  除以  $(x-1)^2(x-2)$  的商式為  $Q(x)$  (其中  $Q(x)$  為奇函數), 餘式為  $2x^2+3x+4$ , 請選出正確的選項。
- (1)  $f(1)=9$
  - (2)  $f(2)=9$
  - (3)  $20f(3)-f(-3)=633$
  - (4)  $f(x)$  除以  $(x-1)^2$  的餘式為  $7x+2$
  - (5)  $f(x)$  除以  $(x-1)(x-2)$  的餘式為  $9x$

11. 某次足球聯賽, 甲、乙等五支球隊的明星球員人數( $x$ )及勝場數( $y$ )如表(1), 請選出正確的選項。

表(1)

	甲	乙	丙	丁	戊
明星球員 人數( $x$ )	2	3	4	5	6
勝場數( $y$ )	4	4	6	10	6

- (1)  $x$  和  $y$  的關係為正相關
  - (2) 若  $x$  和  $y$  的相關係數為  $r$  則  $0.3 < r < 0.7$
  - (3)  $y$  對  $x$  的迴歸直線斜率為  $\sqrt{10}$
  - (4)  $y$  對  $x$  的迴歸直線為  $y=x+2$
  - (5) 利用迴歸直線來預測, 當隊上有 8 位明星球員時, 該隊會有 8 場勝場
12. 空間中有一平面  $E: x+2y+3z=5$ , 令平面  $E$  的法向量  $\vec{n}$  取  $(1,2,3)$ 。有一直線  $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$ , 令直線  $L$  的方向向量  $\vec{\ell} = (1,2,1)$ 。請選出正確的選項。
- (1)  $E$  和  $L$  交於一點且交點坐標為  $(2,0,1)$
  - (2)  $L$  上有一點  $P(3,2,2)$ ,  $P$  到平面  $E$  的距離為  $\frac{4}{7}$
  - (3)  $\vec{n} \cdot \vec{\ell} = 8$
  - (4)  $\vec{\ell}$  在  $\vec{n}$  上的正射影為  $(4,8,12)$
  - (5)  $L$  在  $E$  上的投影直線為  $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{-5}$

### 第貳部分：選填題（占40分）

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（13-34）。  
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 在坐標平面上，設  $O$  為原點， $A(1,2)$ ， $B(3,7)$ 。令點集合  $\Omega = \{P \mid \overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} \text{ 且 } -1 \leq x \leq 3 \text{ 且 } 0 \leq y \leq 2\}$ ，求區域  $\Omega$  的面積為 ⑬。

B. 如圖(3)，用藍、白、紅、黑、黃、綠六種顏色去隨機塗色。在相鄰區域異色的條件下，求塗成法國國旗的機率為  $\frac{\textcircled{14}}{\textcircled{15}\textcircled{16}\textcircled{17}}$ 。(法國國旗最左邊為藍色，中間為白色，右邊為紅色)(化為最簡分數)



圖(3)

C. 數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n-1} + a_n = 2n, n \geq 2 \end{cases}$ ，求此數列的第十一項  $a_{11} = \textcircled{18}\textcircled{19}$ 。

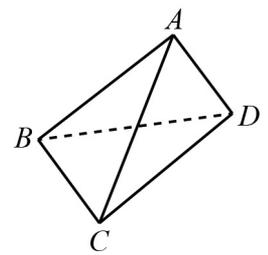
D. 甲、乙、丙三人各有書若干本，要互相贈送。先由甲給乙、丙，所給的書本數等於乙、丙原本的書本數；用同樣的方式再由乙給甲、丙；最後用同樣的方式由丙給甲、乙。互送後每人恰好有 80 本書，求甲原來有 ⑳㉑㉒ 本書。

E. 已知四邊形  $ABCD$  為圓內接四邊形， $\overline{AB}=4$ ， $\overline{BC}=\overline{CD}=2$ ， $\overline{AD}=3$ ，求四邊形  $ABCD$

$$\text{面積} = \frac{\textcircled{23} \sqrt{\textcircled{24} \textcircled{25}}}{\textcircled{26}} \text{。 (化為最簡根式)}$$

F. 空間中有一四面體  $ABCD$  如圖(4)。已知  $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BD}=\overline{CD}=3$  且  $\overline{AD}=\overline{BC}=2$ ， $\triangle ABC$  及  $\triangle BCD$  的兩面角為  $\theta$ ，則

$$\cos \theta = \frac{\textcircled{27}}{\textcircled{28}} \text{。 (化為最簡分數)}$$



圖(4)

G. 若  $y=|x-1|+|x-2|+3|x-3|$  和  $y=6$  相交於兩點  $(\alpha, 6)$  和  $(\beta, 6)$ ，求

$$\alpha + \beta = \frac{\textcircled{29} \textcircled{30}}{\textcircled{31} \textcircled{32}} \text{。 (化為最簡分數)}$$

H. 已知格子點為  $x$  坐標和  $y$  坐標皆為整數的點，則  $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x - 2y \geq -8 \\ 4x + y \leq 20 \end{cases}$  的可行解區域裡的格子點有

            $\textcircled{33} \textcircled{34}$  個。

### 參考公式及可能用到的數值

1. 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

首項為  $a$ ，公比為  $r$  ( $r \neq 1$ ) 的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 乘法公式： $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

3. 若  $\alpha, \beta, \gamma$  為  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  的三根，則

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

4.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  ( $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑)

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

5. 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數  $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

標準差  $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} ((\sum_{i=1}^n x_i^2) - n\mu_X^2)}$

6. 二維數據  $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數  $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線（最適合直線）方程式  $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

8. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010, \log_{10} 3 \approx 0.4771, \log_{10} 5 \approx 0.6990, \log_{10} 7 \approx 0.8451$

9. 角錐體積 =  $\frac{1}{3}$  底面積  $\times$  高