臺北區 111 學年度第一學期
第一次學科能力測驗模擬考試

數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～二冊全
考試時間：100 分鐘
作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響考生成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\dfrac{\text{18-1}}{\text{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1 列的 $\underset{\square}{3}$ 與第 18-2 列的 $\underset{\square}{8}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18-1	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
18-2	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若答案格式是 $\dfrac{\text{19-1}\ \text{19-2}}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 $\underset{\square}{-}$ 與第 19-2 列的 $\underset{\square}{7}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
19-1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
19-2	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\dfrac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利

99363103-31

第壹部分、選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 30 分）

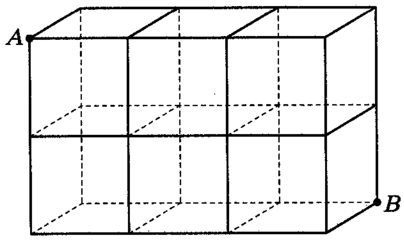
說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1. 小茂在計算機上依序按下 2 x^y 1 0 = 鍵，計算出 2^{10} 的值，接著連按了 2 次 log 鍵，則在面板上出現的數字最接近下列哪一個選項？
   (1) 0.3
   (2) 0.5
   (3) 1
   (4) 3
   (5) 10

2. 已知多項式函數 $f(x)=x^3-9x^2+23x-14$，則 $y=f(x)$ 的圖形在 $x=2$ 附近的一次近似直線斜率為下列何者？
   (1) -4
   (2) -1
   (3) 1
   (4) 3
   (5) 23

3. 已知兩直線 $L_1：5x+12y=60$、$L_2：12x+5y=60$，則下列哪一個選項之直線與 L_1、L_2 所圍出的三角形面積最大？
   (1) $M_1：3x-4y=-10$
   (2) $M_2：3x-4y=-5$
   (3) $M_3：3x-4y=0$
   (4) $M_4：3x-4y=5$
   (5) $M_5：3x-4y=10$

4. 右圖的長方體是由六個大小相同的小正立方體所組成，請問由頂點 A 沿著正立方體的稜邊走捷徑(僅能向右「→」、向下「↓」、向後「↗」)到頂點 B 的走法有幾種？



(1) 20 種
(2) 36 種
(3) 54 種
(4) 60 種
(5) 72 種

5. 現有兩個糖果盒 A、B，當中各有 3 顆糖果。你以均等機會隨機選一個盒子並吃掉當中的一顆糖果，重複這個過程直到你吃掉其中一個盒子的最後一顆糖果為止。假設停止時另一個盒子裡恰有 X 顆糖果，則 X 的期望值為何？

(1) $\frac{3}{2}$ 顆
(2) $\frac{8}{5}$ 顆
(3) $\frac{5}{3}$ 顆
(4) $\frac{15}{8}$ 顆
(5) 2 顆

6. 某大學○○系隨機觀察了 3 名學生 A、B、C 的「大學畢業成績(分)」與入學時「學測科目成績(級分)」如右表，請問下列哪個「學測科目成績」與「大學畢業成績」的相關係數最大？

	A	B	C
大學畢業成績	90	80	70
學測國文成績	11	14	10
學測英文成績	12	11	13
學測數學成績	13	9	12
學測社會成績	14	12	11
學測自然成績	10	13	14

(1)國文
(2)英文
(3)數學
(4)社會
(5)自然

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7. 在坐標平面上，$\triangle ABC$ 三個頂點的坐標分別為 $A(0,3)$、$B(2,0)$、$C(4,1)$。試選出正確的選項。

(1) $\sin A < \sin C$

(2) $\cos B = \dfrac{1}{5}$

(3) $\triangle ABC$ 為銳角三角形

(4) 令 D 為 $\overline{AC}$ 上的點且 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$，則 $\sin B = \dfrac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{\overline{AB} \times \overline{BC}}$

(5) $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 $\dfrac{5\sqrt{13}}{8}$

8. 已知多項式函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 滿足 $f(1)=f(2)=3$ 且 $f(-1)=-3$。試選出正確的選項。

(1) $f(x)$ 的各項係數和為 3

(2) $f(x)$ 除以 $(x-2)$ 的餘式為 3

(3) $f(x)$ 的常數項為 -3

(4) $(x+1)f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式為 3

(5) $y=f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(1,3)$

9. 下列方程式中，請選出有實數解的選項。

(1) $|x+2|+|x-3|=1$

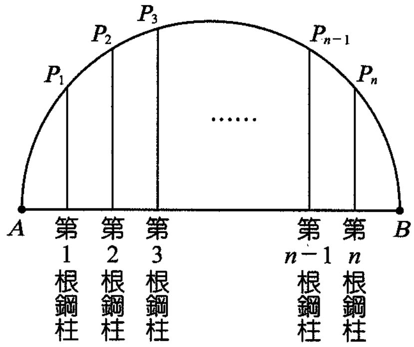
(2) $|x+2|+|x-3|=6$

(3) $|x+2|-|x-3|=1$

(4) $|x+2|-|x-3|=6$

(5) $|x+2|-|x-3|=-1$

10. 如右圖，設計師預計於相距 100 公尺的 A、B 兩地建造一個半圓形拱橋，並於水平橋面 $\overline{AB}$ 上每間隔 x 公尺的距離豎立一根鋼柱至拱橋頂端，鋼柱與拱橋頂端的接點為 P_1，P_2，P_3，……，P_n。試選出正確的選項。



(1)若 $x=5$，分別從 A、B 兩地朝第 11 根鋼柱與拱橋頂端接點 P_{11} 拉繩並綁緊成直線，則 $\angle AP_{11}B=90^\circ$

(2)若 $x=5$，則自 A 地算起的第 3 根鋼柱與第 6 根鋼柱高度相同

(3)「$x=4$ 時，自 A 地算起的第 9 根鋼柱高度」比「$x=5$ 時，自 A 地算起的第 8 根鋼柱高度」還要低

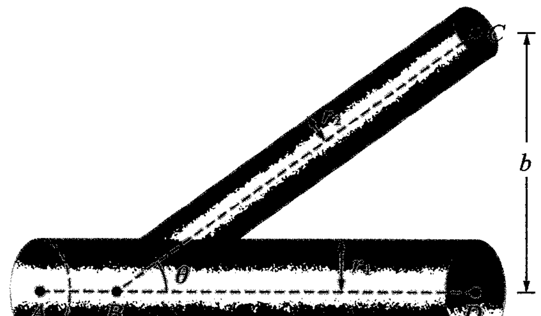
(4)欲使某一根鋼柱高度為 $25\sqrt{3}$ 公尺，則 x 的值可為 5

(5)相鄰兩鋼柱與拱橋頂端的接點距離皆相同，即 $\overline{P_1P_2}=\overline{P_2P_3}=\cdots\cdots=\overline{P_{n-1}P_n}$

11. 心血管系統把血液輸送至全身各處，系統運作要能減少心臟打出血液所需能量，特別是降低血管阻力。根據帕醉定律 (Poiseuille's law)，血液流經血管所產生的阻力 R 和流經血管長度 L 成正比，和血管半徑 r 的四次方成反比，亦即

$$R=\lambda\cdot\frac{L}{r^4}\ ,$$

其中 λ 為一正值常數。如下圖，一條半徑為 r_1 的主血管，及一條與主血管夾角為 θ、半徑為 r_2 的較小分支血管，且經證明，當 $\cos\theta=\dfrac{r_2^{\,4}}{r_1^{\,4}}$ 時，血液流過 AB 段和 BC 段所產生的血管阻力總和為最小。



若 $r_1=10^{0.25}$，$r_2=2^{0.75}$，$a=20$，$b=12$，其中 $a=\overline{AD}$，$b=\overline{CD}$，且 $\overline{AD}\perp\overline{CD}$，若在血液流過 AB 段和 BC 段所產生的血管阻力總和為最小的情形之下，則下列選項哪些正確？

(1) $r_2^{\,4}=8$

(2) $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

(3) $\overline{BC}=20$

(4) $\overline{AB}=4$

(5)血液流過 AB 段和 BC 段所產生的血管阻力總和為 2.9λ

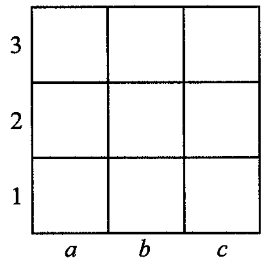
12. 給定一圓心 $A(3,-1)$，半徑為 2 的圓 C，與一直線 $L：y=mx$，其中 $m<0$；已知直線 L 和圓 C 相交於 P、Q 兩點，以點 P、Q 為切點的兩切線互相垂直於 R 點。試選出正確的選項。
(1)$\triangle PAQ$ 的面積為 4
(2)在圓 C 上有 4 個點到直線 L 的距離等於 1
(3) $m=-\dfrac{1}{7}$
(4) $R(1,-3)$
(5)$\triangle PQR$ 的外接圓為 $(x-2)^2+(y+2)^2=2$

三、選填題（占 25 分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 已知有一組數據 (x_i, y_i)，$i=1$，2，……，10，其中 x、y 的算術平均數分別為 8、5，且 x 和 y 的相關程度為高度相關，若 y 對 x 的最適直線通過點 (3 , 2)，則當 $x=-22$ 時可預測 $y=$ 13-1 13-2 13-3 。

14. 將任意數量的士兵棋子，放置於 3×3 的棋盤上，如右圖，每個格子至多只能放一個士兵，且放完後使得每行與每列都有奇數個士兵，則共有 14-1 14-2 種不同的放置情形。



15. 已知 $B(x, y)$ 為坐標平面上異於 $O(0, 0)$，$A(4, 2)$ 的點，且 $\angle OBA=90^\circ$，則滿足此條件之格子點 ($B(x, y)$ 坐標皆為整數的點)共有 15 個。

16. 已知 A、B 兩點的極坐標為 $A[4, \alpha]$、$B[2, \beta]$，其中 $90^\circ \le \alpha \le 180^\circ$、$-45^\circ \le \beta \le 0^\circ$。若 A、B 兩點之斜率的最小值為 a，最大值為 b，則 $a+b=$ 16-1 16-2 16-3 16-4 $\sqrt{\text{16-5}}$ 。(化為最簡根式)

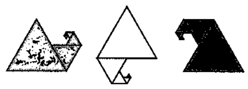
17. 設 $f(x)$，$g(x)$ 皆為實係數多項式，其中 $y=f(x)$ 的首項係數為 1，$y=g(x)$ 的圖形為開口向上的拋物線，已知 $(g(x))^2$ 和 $g(x)$ 分別除以 $f(x)$ 的餘式皆為 $\dfrac{1}{2}x$，則不等式 $f(x)\le 0$ 的整數解有 17 個。

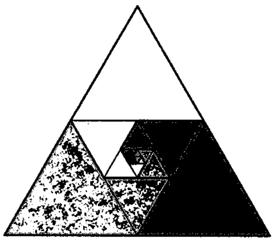
第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

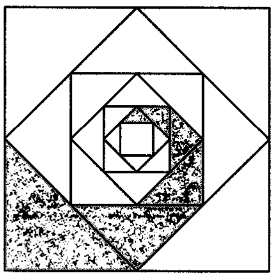
說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

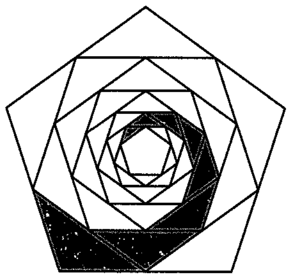
18-20 題為題組

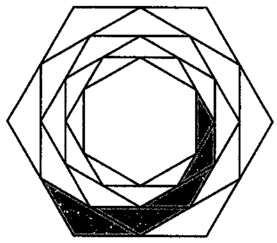
根據自然期刊網站 (https://doi.org/10.1038/s41427-020-0201-3) 刊載文章指出，研究學者利用 STM 顯微鏡發現，在石墨分子上所形成的 chiral Kagomé－α 納米結構，是 Baravelle Spiral 三角三聚體。

觀察下圖，他們是在不同的正多邊形中製造 Baravelle Spiral (螺線的一種)的方式。圖(一)～(四)分別是正三、四、五、六邊形，今在每個正多邊形中以其各邊的中點為頂點，再連成新的小正多邊形，依照此規律一直持續進行，黑灰色部分可視為 Baravelle Spiral 所分割出的圖形。例如圖(一)中 Baravelle Spiral 可分割出面積相等的三塊圖形：。


圖(一)


圖(二)


圖(三)


圖(四)

18. 圖(二)中共有 7 個由大至小的正方形，假設其中最大的正方形面積為 S，最小的正方形面積為 T，且圖(二)中灰色區域的面積為 $\dfrac{S-mT}{n}$，則數對 $(m,n)=$ ＿(18-1 , 18-2)＿。（選填題，3 分）

19. 觀察圖(三)的灰色區域，它是由 8 個由大至小的等腰三角形所組成，若他們的面積可形成一個等比數列，求此等比數列的公比？（非選擇題，6 分）

20. 若圖(四)中最大的正六邊形面積為 6，試求其灰色區域的 5 個等腰三角形的面積和。（非選擇題，6 分）

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\,(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 是$\triangle ABC$ 外接圓半徑)

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

3. $\triangle ABC$ 的面積$=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

4. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left[(x_1-\mu_X)^2+(x_2-\mu_X)^2+\cdots\cdots+(x_n-\mu_X)^2\right]}$

   $=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left[(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots\cdots+x_n^{\ 2})-n\mu_X^{\ 2}\right]}$

5. 二維數據 (X,Y)：(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，……，(x_n,y_n)，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{(x_1-\mu_X)(y_1-\mu_Y)+(x_2-\mu_X)(y_2-\mu_Y)+\cdots\cdots+(x_n-\mu_X)(y_n-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   最適(迴歸)直線方程式為 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

6. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\sqrt{7}\approx 2.646$，$\pi\approx 3.142$

   $\sin 36^\circ=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$，$\cos 36^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

7. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 5\approx 0.6990$，$\log 7\approx 0.8451$

臺北區 111 學年度第一學期
第一次學科能力測驗模擬考試

數學考科參考答案暨詳解

99363114-31

數學考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(2)	(5)	(4)	(4)	(4)	(1)(4)(5)
8.	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**		
(1)(2)(5)	(2)(3)(5)	(1)(3)(4)	(1)(2)(3)(4)(5)	(4)(5)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (2)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：常用對數

解析：$\because \log 2 \approx 0.3010$　$\therefore 2 \approx 10^{0.3010}$，則 $2^{10} \approx (10^{0.3010})^{10} = 10^{3.01}$

$\therefore \log(\log(2^{10})) \approx \log(\log(10^{3.01})) = \log 3.01 \approx \log 3 \approx 0.4771$

故選(2)。

2. (2)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數，一次近似

解析：$f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 14 = (x-2)^3 - 3(x-2)^2 - (x-2) + 4$

$\therefore$ 在 $x=2$ 附近的一次近似直線為 $y = -(x-2)+4$

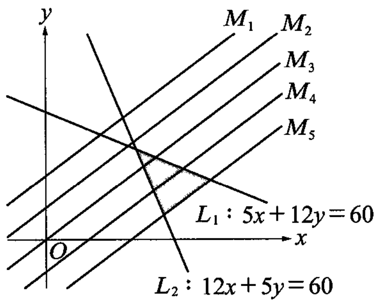
其斜率為 -1，故選(2)。

3. (5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線方程式

解析：作圖如下



由圖可知，兩直線與 M_5 所圍出的面積最大，故選(5)。

4. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：不完全相異物的直線排列

解析：走法為 →→→↓↓↗ 的排列數，

即 $\dfrac{6!}{3!2!1!} = 60$ 種，故選(4)。

5. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：期望值

解析：剩下三顆糖果的機率 $= P(AAA) + P(BBB) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4}$

剩下兩顆糖果的機率

$= P(AABA) + P(ABAA) + P(BAAA) + P(BBAB) + P(BABB)$

$+ P(ABBB) = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$

剩下一顆糖果的機率 $= 1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{8}$

$\therefore$ 剩下糖果顆數的期望值 $= 3\times\dfrac{1}{4} + 2\times\dfrac{3}{8} + 1\times\dfrac{3}{8} = \dfrac{15}{8}$

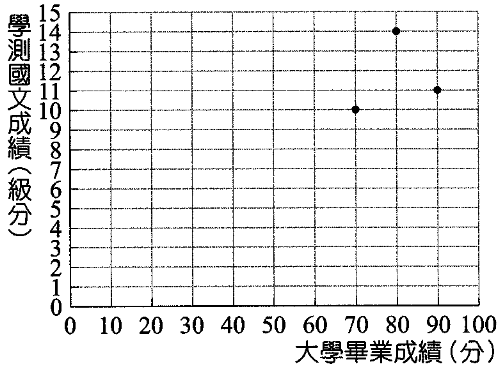
故選(4)。

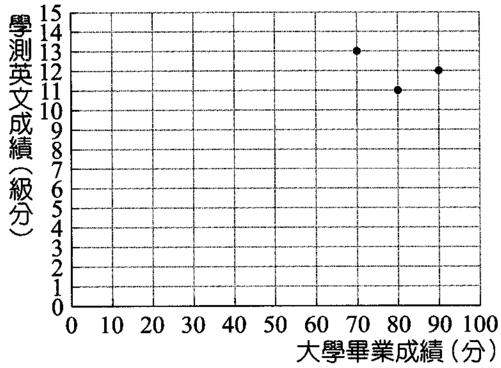
6. (4)

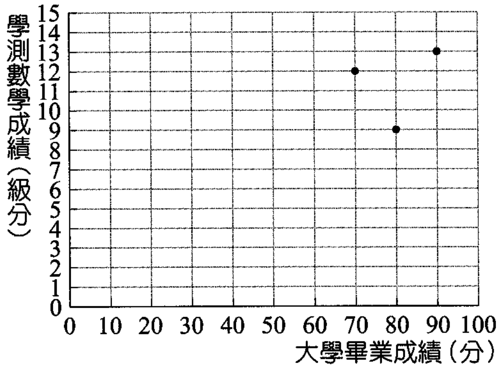
出處：第二冊〈數據分析〉

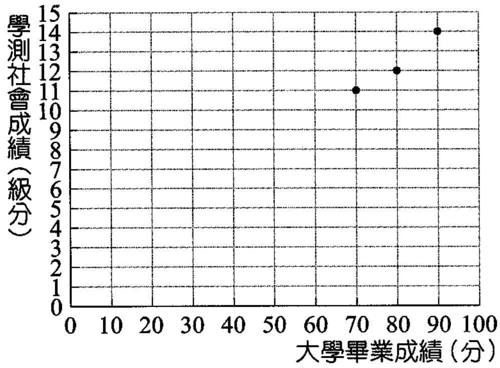
目標：散布圖，相關係數

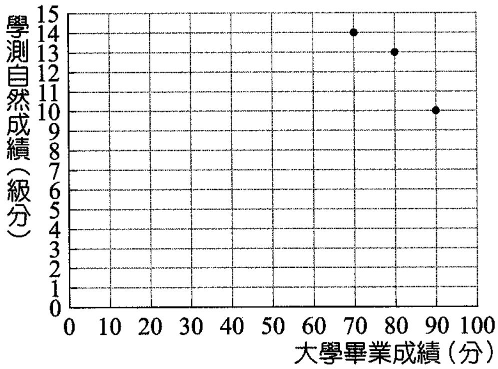
解析：畫出散布圖如下：











可觀察出學測社會成績和大學畢業成績幾乎成一斜率為正的直線，即相關係數最大，故選(4)。

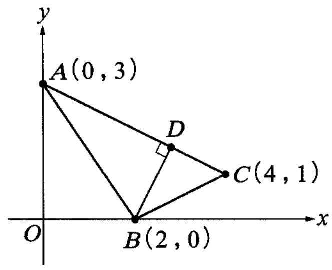
二、多選題

7. (1)(4)(5)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：正弦定理，餘弦定理，面積公式

解析：



(1) ○：$\because \overline{BC}=\sqrt{5}<\sqrt{13}=\overline{AB}$

由正弦定理

$\because \dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$　$\therefore \sin A<\sin C$

(2) ╳：$\overline{AC}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$，由餘弦定理，

$\cos B=\dfrac{13+5-20}{2\times\sqrt{13}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{65}}{65}$

(3) ╳：$\because \cos B=-\dfrac{\sqrt{65}}{65}<0$

$\therefore \triangle ABC$ 為鈍角三角形

(4) ○：由面積公式，得$\triangle ABC$ 面積為

$\dfrac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{2}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B$

$\therefore \sin B=\dfrac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{\overline{AB}\times\overline{BC}}$

(5) ○：由 $\cos B=-\dfrac{\sqrt{65}}{65}$，得 $\sin B=\dfrac{8\sqrt{65}}{65}$，

由正弦定理，外接圓半徑為

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{65}}{8}=\dfrac{5\sqrt{13}}{8}$

故選(1)(4)(5)。

8. (1)(2)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：除法原理，餘式定理，三次函數的圖形對稱中心

解析：(1) ○：$f(x)$ 的各項係數和為 $f(1)=3$

(2) ○：$f(x)$ 除以 $(x-2)$ 的餘式為 $f(2)=3$

(3) ╳：設 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-k)+3$

$f(-1)=-3$ 代入，得

$(-2)\times(-3)\times(-1-k)+3=-3\Rightarrow k=0$

故 $f(x)$ 的常數項為 $3\neq-3$

(4) ╳：$(x+1)f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)x+3(x+1)$

$x=1$ 代入得 $3(1+1)=6\neq3$

(5) ○：$\because f(x)$ 圖形通過 $(0 , 3)$、$(1 , 3)$、$(2 , 3)$ 三點

$\therefore$對稱中心為 $(1 , 3)$

故選(1)(2)(5)。

9. (2)(3)(5)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：絕對值方程式

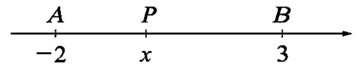
解析：在數線上，

$|x+2|=|x-(-2)|$ 表 $P(x)$ 與 $A(-2)$ 的距離

$|x-3|$ 表 $P(x)$ 與 $B(3)$ 的距離

分以下兩種情形討論：

(i) 若 P 在 $\overline{AB}$ 上：



則 $|x+2|+|x-3|=\overline{AB}=5$，

$-5<|x+2|-|x-3|<5$

(ii) 若 P 不在 $\overline{AB}$ 上：

則 $|x+2|+|x-3|>\overline{AB}=5$，

$|x+2|-|x-3|=5$ 或 -5

由(i)、(ii)得，

$|x+2|+|x-3|\geq5$，$-5\leq|x+2|-|x-3|\leq5$

故選(2)(3)(5)。

10. (1)(3)(4)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：算幾不等式

解析：(1) ○：$\because \overline{AB}$ 為半圓的直徑

$\therefore \angle AP_iB=90^\circ (i=1 , 2 , \cdots\cdots , n)$

(2) ╳：若 $x=5$，即有 $(100\div5)-1=19$ 根鋼柱

自 A 地算起的第 3 根鋼柱低於第 6 根鋼柱高度

(3) ○：若 $x=4$ 時，即有 $(100\div4)-1=24$ 根鋼柱

自 A 地算起的第 9 根鋼柱高度為

$\sqrt{36\times64}=\sqrt{2304}$

若 $x=5$ 時，

自 A 地算起的第 8 根鋼柱高度為

$\sqrt{40\times60}=\sqrt{2400}$

(4) ○：$25\sqrt{3}=\sqrt{25\times75}$　$\therefore x$ 的值可為 5

(5) ╳：相鄰兩鋼柱與拱橋頂端的接點距離不一定相同

故選(1)(3)(4)。

11. (1)(2)(3)(4)(5)

出處：第一冊〈指數、對數〉、第二冊〈三角比〉

目標：指數的應用，三角比

解析：(1) ○：$r_2^4=(2^{0.75})^4=2^3=8$

(2) ○：$\cos\theta=\dfrac{r_2^4}{r_1^4}=\dfrac{8}{(10^{0.25})^4}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$

(3) ○：由 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow \sin\theta=\dfrac{3}{5}=\dfrac{12}{\overline{BC}}$

$\Rightarrow \overline{BC}=20$

(4) ○：$\overline{AB}=\overline{AD}-\overline{BD}=a-\overline{BC}\times\cos\theta$

$=20-20\times\dfrac{4}{5}$

$=20-16=4$

(5) ○：血管阻力總和最小值為

$\lambda\cdot\dfrac{4}{r_1^4}+\lambda\cdot\dfrac{20}{r_2^4}=\lambda\cdot\dfrac{4}{10}+\lambda\cdot\dfrac{20}{8}=2.9\lambda$

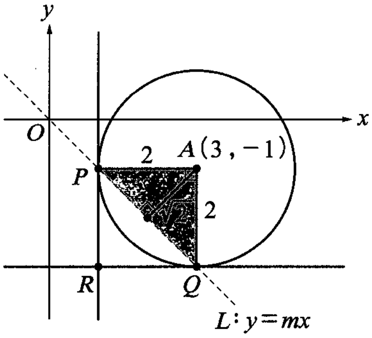
故選(1)(2)(3)(4)(5)。

12. (4)(5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓與直線的關係，點到直線的距離，對稱點

解析：由題意知，四邊形 $APRQ$ 為邊長 2 的正方形



(1)╳：$\triangle PAQ$ 的面積為 $2\neq4$

(2)╳：圓心到直線 L 的距離為 $\sqrt{2}$

∴在圓 C 上僅有 2 個點到直線 L 的距離等於 1，並非 4 個

(3)╳：由點到直線的距離

$d(A,L)=\dfrac{|3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}\Rightarrow m=-1$ 或 $\dfrac{1}{7}$，取負

(4)○：∵直線 L 的方程式為 $y=-x$，且 R 為圓心對直線 L 的對稱點

∴$R(1,-3)$

(5)○：$\triangle PQR$ 的外接圓為以 $\overline{AR}$ 為直徑的圓，

方程式為 $(x-2)^2+(y+2)^2=2$

故選(4)(5)。

三、選填題

13. -13

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：最適直線方程式

解析：由題意可設最適直線方程式為 $(y-5)=m(x-8)$，

$(3,2)$ 代入得 $m=\dfrac{3}{5}$

即直線方程式為 $3x-5y=-1$

將 $x=-22$ 代入得 $y=-13$。

14. 16

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：排列組合

解析：$333\rightarrow1$ 種

$311\rightarrow9$ 種

$111\rightarrow6$ 種

∴共 16 種。

15. 6

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓方程式

解析：求以 $\overline{OA}$ 為直徑的圓方程式：

$(x-2)^2+(y-1)^2=5$，則 B 點會落在圓周上

滿足此圓方程式之格子點 B 坐標 (x,y) 討論如下：

x	4	0	3	3	1	1
y	0	2	3	-1	3	-1

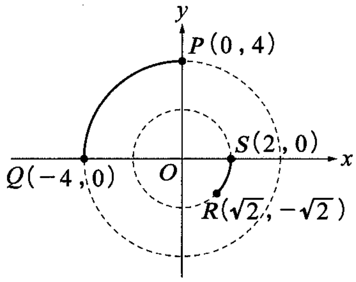
故共有 6 個點。

16. $-1-2\sqrt{2}$

出處：第一冊〈直線與圓〉、第二冊〈三角比〉

目標：極坐標，直線的斜率

解析：依題意作圖如下，



斜率的最小值為 $a=m_{PR}=\dfrac{4-(-\sqrt{2})}{0-\sqrt{2}}$

$=-1-2\sqrt{2}$

斜率的最大值為 $b=m_{QS}=0$

故所求 $a+b=-1-2\sqrt{2}$。

17. 3

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：除法原理，多項式不等式

解析：由除法原理，設 $g(x)$ 除以 $f(x)$ 的商式為 $q(x)$，

由題目知餘式為 $\dfrac{1}{2}x$

$\Rightarrow g(x)=f(x)\cdot q(x)+\dfrac{1}{2}x$

∵ $g(x)$ 為二次多項式，且 $g(x)$ 除以 $f(x)$ 的餘式為一次式，故 $f(x)$ 為二次多項式

∴商式 $q(x)$ 為常數，可令 $q(x)=a$，a 為實數

故 $g(x)=af(x)+\dfrac{1}{2}x$ ……………………………①

將①平方得

$(g(x))^2=\left(af(x)+\dfrac{1}{2}x\right)^2$

$=a^2\cdot(f(x))^2+2\cdot af(x)\cdot\dfrac{1}{2}x+\dfrac{x^2}{4}$

$=f(x)\cdot(a^2\cdot f(x)+ax)+\dfrac{x^2}{4}$ ……………②

由除法原理可設

$\dfrac{x^2}{4}=f(x)\cdot b+r(x)$ ……………………………③

$b\neq0$，其中 $r(x)=0$ 或 $\deg(r(x))<\deg(f(x))=2$

再代回②可得

$(g(x))^2=f(x)\cdot(a^2\cdot f(x)+ax)+\dfrac{x^2}{4}$

$=f(x)\cdot(a^2\cdot f(x)+ax)+f(x)\cdot b+r(x)$

$=f(x)\cdot(a^2\cdot f(x)+ax+b)+r(x)$

又 $r(x)=0$ 或 $\deg(r(x))<\deg(f(x))=2$，

且 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的餘式 $\dfrac{1}{2}x$，

由除法原理的唯一性得 $r(x)=\dfrac{1}{2}x$

故③可寫成 $\dfrac{x^2}{4}=f(x)\cdot b+\dfrac{1}{2}x$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{4b}\cdot(x^2-2x)=\dfrac{1}{4b}\cdot x(x-2)$

又 $y=f(x)$ 的首項係數為 1，

故 $f(x)=x(x-2)$

得 $f(x)=x(x-2)\le 0$ 的解為 $0\le x\le 2$

故 $f(x)\le 0$ 的整數解有 0，1，2，共 3 個。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (1 , 4)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：數列

解析：依圖(二)，

可看出所求灰色區域的面積為 $\dfrac{S-T}{4}$

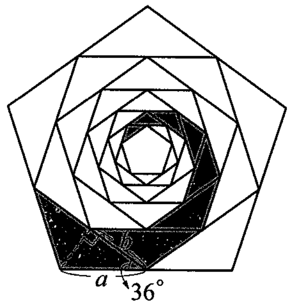
故數對 $(m , n)=(1 , 4)$。

19. $\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$

出處：第二冊〈數列與級數〉、第二冊〈三角比〉

目標：等比數列，三角比

解析：



如上圖，

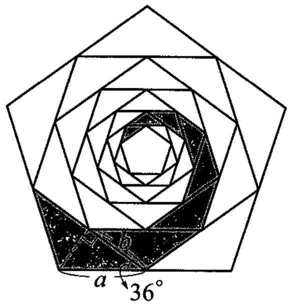
可知兩等腰三角形為相似形，且邊長比為 $a:b$

且 $\dfrac{b}{a}=\cos 36^\circ$

∵面積比＝邊長平方比

∴公比 $=\cos^2 36^\circ=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$。

◎**評分原則**



如上圖，

可知兩等腰三角形為相似形，且邊長比為 $a:b$　(2 分)

且 $\dfrac{b}{a}=\cos 36^\circ$　(1 分)

∵面積比＝邊長平方比　(1 分)

∴公比 $=\cos^2 36^\circ=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$。　(2 分)

20. $\dfrac{781}{1024}$

出處：第二冊〈數列與級數〉、第二冊〈三角比〉

目標：等比數列，三角比

解析：〈解法一〉

同第 19. 題

相鄰正六邊形的面積比為 $\cos^2 30^\circ=\dfrac{3}{4}$

最小正六邊形的面積為 $6\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^5=\dfrac{729}{512}$

同第 18. 題，所求灰色面積為 $\dfrac{6-\dfrac{729}{512}}{6}=\dfrac{781}{1024}$。

〈解法二〉

同第 19. 題，

相鄰正六邊形的面積比為 $\cos^2 30^\circ=\dfrac{3}{4}$

相鄰等腰三角形的面積比亦為 $\dfrac{3}{4}$

由最大正六邊形面積為 6，

則第二大的正六邊形面積為 $6\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{2}$

則同第 18. 題，

灰色面積中最大塊的等腰三角形面積為 $\dfrac{6-\dfrac{9}{2}}{6}=\dfrac{1}{4}$

故灰色面積為 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^4$

$=\dfrac{\dfrac{1}{4}\left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^5\right)}{1-\dfrac{3}{4}}=\dfrac{781}{1024}$。

◎**評分原則**

〈解法一〉

同第 19. 題

相鄰正六邊形的面積比為 $\cos^2 30^\circ=\dfrac{3}{4}$　(2 分)

最小正六邊形的面積為 $6\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^5=\dfrac{729}{512}$　(2 分)

同第 18. 題，所求灰色面積為 $\dfrac{6-\dfrac{729}{512}}{6}=\dfrac{781}{1024}$。　(2 分)

〈解法二〉

同第 19. 題，

相鄰正六邊形的面積比為 $\cos^2 30^\circ=\dfrac{3}{4}$

相鄰等腰三角形的面積比亦為 $\dfrac{3}{4}$　(2 分)

由最大正六邊形面積為 6，

則第二大的正六邊形面積為 $6\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{2}$

則同第 18. 題，

灰色面積中最大塊的等腰三角形面積為 $\dfrac{6-\dfrac{9}{2}}{6}=\dfrac{1}{4}$　(2 分)

故灰色面積為 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^4$

$=\dfrac{\dfrac{1}{4}\left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^5\right)}{1-\dfrac{3}{4}}=\dfrac{781}{1024}$。　(2 分)-