

練習 19、自 n 個正奇數：1、3、5、 \dots 、 $2n-1$ ，不重複的任意取出 r 個，作其乘積，並以 P_r 表示所有乘積之和，求 $1+P_1+P_2+P_3+\dots+P_n=?$

【解】：考慮 n 次多項式 $f(x) = (1+x)(1+3x)(1+5x)\cdots(1+(2n-1)x)$
 $= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ ，

可知 $a_0 = 1$ ， $a_1 = 1+3+5+\dots+(2n-1) = P_1$ ，

$$a_2 = 1 \times 3 + 1 \times 5 + \dots + 3 \times 5 + 3 \times 7 + \dots + (2n-3)(2n-1) = P_2，$$

即可推得 $a_k = P_k$ ，

所求 $1+P_1+P_2+P_3+\dots+P_n$ 為 $f(x)$ 各項係數和 $= (2)(4)(6)\cdots(2n) = 2^n \cdot n!$ #