

高雄女中九十九學年度第一次模擬考試題

數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 5 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 I 題共 9 題

作答方式：• 用 2B 鉛筆在「答案卡」上劃記，修正時應以橡皮擦拭，切勿使用修正帶(液)
• 答錯不倒扣

作答說明：在答案卡適當位置選出數值或符號。請仔細閱讀下面的例子。

(一) 填答選擇題時，只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 -, ±, 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題的選項為 (1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而考生得到的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 劃記 (注意不是 7)，如：

解 答 欄											
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若多選題第 10 題考生認為正確的選項為 (1) 與 (3) 時，考生要在答案卡第 10 列的 與 劃記，如：

10	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
----	-------------------------------------	--------------------------	-------------------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

(二) 選填題的題號是 A, B, C, …，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 與第 19 列的 劃記，如：

18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 與第 21 列的 劃記，如：

20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※試題後附有有可能用到的參考公式及數值

第壹部分：選擇題（佔 55 分）

一、單選題（佔 25 分）

說明：第 1 至 5 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

- () 1. 設 $z = a + bi$ ，在複數平面上，所有滿足 $|z - i| \leq 5$ ，且 a, b 為整數的 z 點共有幾個？
- (1) 80
(2) 81
(3) 82
(4) 83
(5) 84。
- () 2. 已知 $f(x) = 2x^4 + x^3 - 16x - 8$ ，則 $f(x)$ 的一次有理因式共有多少個？
- (1) 1 個
(2) 2 個
(3) 3 個
(4) 4 個
(5) 5 個
- () 3. 設 a 為一正實數且滿足 $a^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ，試問下列選項何者正確？
- (1) $a^2 = 2$
(2) $\log_{\sqrt{2}} a = \sqrt{2}$
(3) $a > \sqrt{2}$
(4) $\log_2 a > \frac{\pi}{6}$
(5) $a < 4^{\frac{\sqrt{2}}{6}}$
- () 4. 如果一個三位正整數 $a_1 a_2 a_3$ 滿足 $a_1 < a_2$ 且 $a_3 < a_2$ ，則稱這樣的三位數為凸數（如 120、363、374 等），那麼所有凸數的個數有幾個？
- (1) 240 個
(2) 285 個
(3) 520 個
(4) 729 個
(5) 920 個。

- () 5. 某學年度大學學科能力測驗簡章規定，各學科成績之表示及使用均採級分制。原始得分 0 分爲 0 級分，最高爲 15 級分，缺考以 0 級分計。各級分與原始得分 X 、級距 L 之對照表如下：

級分	原始得分範圍	級分	原始得分範圍	級分	原始得分範圍
15	$14L < X \leq \text{滿分}$	10	$9L < X \leq 10L$	5	$4L < X \leq 5L$
14	$13L < X \leq 14L$	9	$8L < X \leq 9L$	4	$3L < X \leq 4L$
13	$12L < X \leq 13L$	8	$7L < X \leq 8L$	3	$2L < X \leq 3L$
12	$11L < X \leq 12L$	7	$6L < X \leq 7L$	2	$L < X \leq 2L$
11	$10L < X \leq 11L$	6	$5L < X \leq 6L$	1	$0 < X \leq L$

若小華對過答案知道自己數學原始分數爲 82.5 分，且老師預估此年度數學科級距 L 爲 5.90~6.40。若老師預估準確，則下列哪一個敘述是正確的？

- (1) 小華數學科的級分可能爲 15
- (2) 小華數學科的級分必爲 14
- (3) 小華數學科的級分可能爲 14
- (4) 小華數學科的級分必爲 13
- (5) 小華數學科的級分可能爲 12

二、多選題（佔 30 分）

說明：第 6 至 11 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 5 分，只錯一個選項者可得 3 分，錯兩個選項者可得 1 分，錯三個選項或三個以上選項者不給分。

- () 6. 等差數列 $\langle a_n \rangle$ ，首項 $a_1 = 8$ ， $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ，若 $S_{16} = S_{33}$ ，則下列那些選項正確？

(1) 公差是 $-\frac{2}{3}$

(2) $a_8 + a_9 + a_{10} = 16$

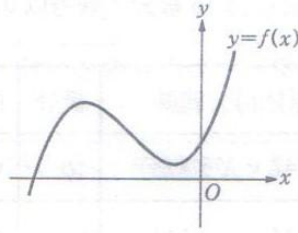
(3) $S_{49} < 0$

(4) 若 $b_n = 2^{a_n}$ ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是一個收斂的等比級數

(5) $\sum_{n=30}^{\infty} \frac{1}{|a_n a_{n+1}|} = \frac{3}{5}$

- () 7. 實係數多項式 $f(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$ 的圖形如附圖所示，且與 x 軸只有一個交點。則下列何者正確？

- (1) $a > 0$
- (2) $b^2 - 4ac < 0$
- (3) $c < 0$
- (4) $a + b + c > 0$
- (5) $9a - 3b + c > 0$



- () 8. 設 x, y 均為非 0 實數， $a > 0$ ， $b > 0$ 且 $a \neq 1$ ，則下列選項哪些是正確的？

- (1) $\log_a x^2 = 2 \log_a x$
- (2) $\log_a |y| - \log_a |x| = \frac{\log_a |y|}{\log_a |x|}$
- (3) $a^{\log b} = b^{\log a}$
- (4) $\log_a b^{4x} = x \log_a b^4$
- (5) 若 $a > 1$ 時，則對於任意的實數 x ， $a^x > x$ 恆成立。

- () 9. 下列有關雙曲線 $\Gamma: \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ 的敘述，何者正確？

- (1) 過點 $(1, 4)$ 有兩條切線
- (2) 過點 $(-4, -6)$ 有一條切線
- (3) 斜率為 1 的切線有一條
- (4) 對於任意的實數 m ，直線 $y = mx$ 與 Γ 皆不可能相切
- (5) 過點 $(2, 1)$ 的切線皆與 Γ 相切於 x 軸的上半平面

- () 10. 課堂上，老師將他的手機十個號碼 9998855306 隨機任意寫在黑板上，試問下列各選項何者正確？

- (1) 學生小花在她手機上將此十個號碼隨機撥出一次，則能打通老師手機的機率為 $\frac{1}{151200}$
- (2) 老師將其手機前四個號碼 0958 正確告訴學生後，學生小花隨機撥出剩下六個號碼一次，則能接通老師手機的機率為 $\frac{1}{720}$
- (3) 從十個號碼中任取四個號碼的組合數共有 83 種
- (4) 從十個號碼中任取四個號碼，其中必含 0 的組合數共有 23 種
- (5) 從十個號碼中任取四個號碼的排列數共 758 種。

() 11. 從 $1, 2, \dots, 2010$ 這 2010 個整數中隨意取四個 (可重複選取), 依序記為 a, b, c, d , 以 p 表示 $ad - bc$ 是奇數的機率, q 表示 $ad - bc$ 是偶數的機率。試問下列哪些敘述是正確的?

(1) $p + q = 1$

(2) $p = q$

(3) $p \geq \frac{1}{2}$

(4) $|p - q| \geq \frac{1}{5}$

(5) $|p - q| \leq \frac{1}{4}$

第貳部分：選填題 (佔 45 分)

說明：1. 第 A 至 I 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (12-34)。

2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設直線 L 與二直線 $L_1: x + 3y = 10$, $L_2: 3x - 2y + 8 = 0$ 相交於 A, B 兩點，若原點為線段 AB 的中點，則

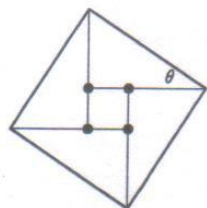
直線 L 的斜率為 $\frac{\textcircled{12}}{\textcircled{13}}$ 。(最簡分數)

B. 已知 $f(x) = x^{49} + 2x^2 + 1$ 與 $g(x) = x^{47} + 2x^2 + 2$, 且 $f(k) = 2$, $g(k) = 3$, 則 $k = \textcircled{14} \textcircled{15}$ 。

C. 已知 $\log(y - 6) + \log(y - 4) = \log(x^2 + 8)$, 則 $x^2 + y^2 - 6y$ 之最小值為 $\textcircled{16} \textcircled{17}$ 。

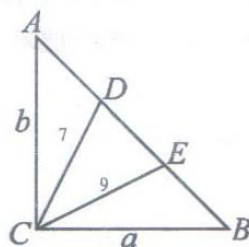
D. 2010 年斑城歌唱大會會標如右圖，它是由四個全等之直角三角形與中間一個小正方形所排成的一個大正方形，若直角三角形中較小之銳角為 θ , 大正方形面積為 1, 小正方形面積為 $\frac{1}{25}$, 則：

$$\cos^3 \theta + \sin^3 \theta = \frac{\textcircled{18} \textcircled{19}}{\textcircled{20} \textcircled{21} \textcircled{22}}$$



E. 如右圖，直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EB}$ ，已知

$$\overline{CD} = 7, \overline{CE} = 9, \text{則 } \overline{DE} = \sqrt{\textcircled{23} \textcircled{24}}$$



F. 已知點P為拋物線： $y^2 = 8x$ 上的動點，點F為此拋物線的焦點，A(6,4)為一定點，則 $\overline{PA} + \overline{PF}$ 的最小值為 25。

G. 一橢圓： $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ，點 F_1 和 F_2 為兩焦點，點 $P(3, \frac{12}{5})$ 為一定點，若 $\angle F_1PF_2$ 的分角線為 $L: y = mx + k$ ，

$$\text{則 } m = \frac{\textcircled{26} \textcircled{27}}{\textcircled{28}}$$

H. 下列12個括弧： $(1, 2), (3, 4, 5), (6, 7, 8, 9), \dots, (78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90)$ 共有90個數，從中任取二個數，此二個數不在同一個括弧內的方法數為何？

$$\textcircled{29} \textcircled{30} \textcircled{31} \textcircled{32}$$

I. 某園遊會中，一攤位舉辦擲骰子遊戲。現場準備一公正骰子，參加者丟此骰子一次，規定當出現點數 x ($x=1,2,3,4,5,6$)時，可得獎金 y 元，其中 y 為 $\log_3(x^3 - 3x^2 + 3x + 3)$ 的整數部分；則一個參加者可得

$$\text{獎金 } y \text{ 的期望值是 } \frac{\textcircled{33}}{\textcircled{34}} \text{ 元}$$

可能用到的參考公式及數值

- 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的公式解：
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
- 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 間的距離 $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- 通過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的直線斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ， $x_2 \neq x_1$
- 首項為 a 且公差為 d 的等差數列前 n 項之和 $S_n = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$
首項為 a 且公比為 r 的等比數列前 n 項之和 $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ， $r \neq 1$
- 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
 $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
 $\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
- 算術平均數： $\bar{X} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
(樣本)標準差：
$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n\bar{X}^2 \right)}$$
- 95% 信心水準下之信賴區間：
$$\left[\hat{p} - 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$
- 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$
- 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$

高雄女中九十九學年度第一次模擬考試題

數學考科解答

第壹部分：選擇題（佔 55 分）

一、單選題（佔 25 分）

題號	1	2	3	4	5
答案	2	2	5	1	3

二、多選題（佔 30 分）

題號	6	7	8	9	10	11
答案	24	1245	34	24	145	145

第貳部分：選填題（佔 45 分）

題號	A	B	C	D	E	F	G	H	I
答案	$\frac{1}{2}$	-1	16	$\frac{91}{125}$	$\sqrt{26}$	8	$\frac{20}{9}$	3641	$\frac{7}{3}$