

一、選擇題：(每題 8 分)

- \_\_\_\_\_ 1、已知一等比數列  $\langle a_n \rangle$  有 11 項，若  $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{11} = 1$  且  $a_3 = 9$ ，求下列各選項何者正確？  
 (A)  $a_6 = 1$ . (B)  $a_9 = \frac{1}{9}$ . (C)  $a_1 \cdot a_{11} > 1$ . (D) 公比為小於 1 的正數. (E)  $a_1 = 81$ . (多選)
- \_\_\_\_\_ 2、試問下列選項何者正確？(A)若  $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$  為等差數列，則  $\langle a_n + b_n \rangle$  亦為等差數列.  
 (B)若  $\langle a_n \rangle$  為等差數列， $r \in \mathbb{R}$ ，則  $\langle ra_n \rangle$  亦為等差數列.  
 (C)若  $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$  為等比數列，則  $\langle a_n + b_n \rangle$  亦為等比數列.  
 (D)若  $\langle a_n \rangle$  為等比數列， $r \in \mathbb{R}$ ，則  $\langle ra_n \rangle$  亦為等比數列.  
 (E)若  $a$ 、 $b$ 、 $c$  成等比，則  $b = \sqrt{ac}$ . (多選)

二、填充題：(每格 8 分)

- 1、若  $xy$  平面上點  $P_1(1,1)$ ， $P_2(2,1)$ ， $P_3(2,2)$ ， $P_4(3,1)$ ， $P_5(3,2)$ ， $P_6(3,3)$ ， $P_7(4,1)$ ， $P_8(4,2)$ ， $P_9(4,3)$ ， $P_{10}(4,4)$ ，依此規則，則  $P_{200}$  之坐標為 \_\_\_\_\_。
- 2、已知數列  $\langle a_k \rangle$  的第  $n$  項為  $a_n = \frac{n}{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ )，若  $a_{10} = a_k \cdot a_{20}$ ，則  $k$  之值為 \_\_\_\_\_。
- 3、設  $\langle b_n \rangle$  是一  $A.P.$ ，若  $b_3 = 56$ ， $b_{10} = -7$ ，則公差  $d =$  \_\_\_\_\_；  
 若  $S_n$  表前  $n$  項的和，則  $n =$  \_\_\_\_\_ 時， $S_n$  有最大值；試求  $S_{20} =$  \_\_\_\_\_。
- 4、設  $a, b, c, d$  四正數成  $G.P.$ ，若  $a+b=9$ ， $c+d=36$ ，則公比為 \_\_\_\_\_。
- 5、已知從高雄騎腳踏車到台北共需騎約 400 公里，若預計騎 5 天，設  $a_n$  表第  $n$  天騎乘的公里數。考量到肌肉疲勞的問題，故設定  $a_n = a_{n-1} - 10$  (公里)，試求最後一日需騎 \_\_\_\_\_ 公里。
- 6、三正數成等差，三數和 90，若分別加上 1、3、49 後三數成等比數列，求三數中最小的數字為 \_\_\_\_\_。
- 7、求值  $\sum_{k=3}^{10} (3k-2) =$  \_\_\_\_\_； $\sum_{k=3}^8 3 \cdot (2)^{-k} =$  \_\_\_\_\_。

三、計算證明題：

- 1、試證：不論  $n$  是任何正整數， $10^n + 3 \cdot 4^n + 5$  都是 9 的倍數。
- 2、數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + 1 (n \geq 2) \end{cases}$ ，則  
 (1) 猜測一般項 (以  $n$  表示).  
 (2) 試利用數學歸納法驗證你的猜測。