壹、是非題：(對的畫 O，錯的畫 X，需說明判斷方式或理由)

一、a,b,c,d 為四個相異實數且滿足 $a>b>0>c>d$，試判斷下列各題的正確性.

(一) __O__ $a+c>b+d$.

$a+c>b+c>b+d$

(二) __X__ $\frac{c+d}{2}\ge\sqrt{cd}$.

$c+d<0$ 不符合算幾不等式

(三) __X__ $a^2>c^2$.

$1>-2\Rightarrow(1)^2<(-2)^2$

(四) __X__ $\frac{d}{c}>\frac{d+a}{c+a}$.

$\frac{d}{c}-\frac{d+a}{c+a}=\frac{a(d-c)}{c(c+a)}$ 視 $c+a$ 正負號而定

二、已知 a,b,c,d 為有理數，r,s 為無理數，試判斷下列各題的正確性.

(一) __X__ ar 為無理數.

$a=0\Rightarrow ar=0$

(二) __X__ $r+s$ 為無理數.

$\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$

(三) __O__ $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}\Leftrightarrow a=c,b=d$

$a-c+(b-d)\sqrt{3}=0$

$\Rightarrow b-d=0\Rightarrow a-c=0$

(四) __X__ $a+r=b+s\Leftrightarrow a=b,r=s$.

$a=1,r=\sqrt{2},b=0,s=1+\sqrt{2}$

貳、填充題：(一　五題每格 4 分，其餘每格 5 分，共 66 分)

一、求下列各式之值：

(一) $\sqrt{8}-2\sqrt{18}+3\sqrt{50}=$________.

(二) $(3+\sqrt{7})^3+(3-\sqrt{7})^3=$________。

Ans：(一) $11\sqrt{2}$；(二) 180

二、試計算 $0.3\dot{5}\times\frac{9}{8}=$________。(請以分數表示)

Ans：$\frac{2}{5}$　(Hint：將 $0.3\dot{5}$ 化為分數形式)

三、函數 $f(n)$ 為「將 $\frac{1}{7}$ 化成小數，小數點後第 n 位數字」，則：

(一) $f(106)=$________.

(二) $f(101)+f(102)+f(103)+\cdots+f(110)=$________。

Ans：(一) 8；(二) 44

Hint：$\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$ 的循環小數

四、因式分解：

(一) $x^2-y^2-9z^2+6yz=$ $(x+y-3z)(x-y+3z)$.

(二) $x^3+x^2-2=$ $(x-1)(x^2+2x+2)$。

Hint：$x^3+x^2-2=(x^3-1)+(x^2-1)$

五、若 $\sqrt{14+8\sqrt{3}}=a+b$，其中 a 為正整數，$0<b<1$，則：

(一) $a=$________.

(二) $\frac{1}{b+3-\sqrt{6}}=$________。

Ans：(一) 5；(二) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

六、設 $-2\le x\le 5$，$-3\le y\le 1$，試求下列各數的範圍：

(一) xy：$-15\le xy\le 6$.

(二) x^2+y^2：$0\le x^2+y^2\le 34$。

七、已知正實數 x,y 滿足 $x+2y=4$，求 xy 最大值________，且 xy 發生最大值時的 x,y 值分別為________。

$x+2y\ge2\sqrt{x(2y)}\Rightarrow4\ge2\sqrt{2xy}\Rightarrow2\ge xy$

xy 發生最大值時：$x=2y=2\Rightarrow x=2,y=1$

八、試解不等式 $|2x-1|>3$：________。

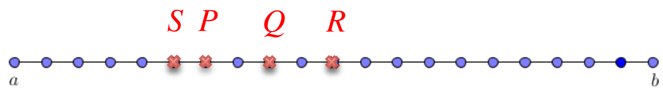
$2x-1>3$ 或 $2x-1<-3\Rightarrow x>2$ 或 $x<-1$

九、試解不等式 $\begin{cases}|x-2|\le3\\|x|>2\end{cases}$：$2<x\le5$。

參、計算說明題：(二、三、四題需有過程才給分)

一、設 a,b 為實數且 $a<b$，請在數線上標示下列各點：

$P\left(\frac{7a+3b}{10}\right)$、$Q\left(\frac{3a+2b}{5}\right)$、、$S\left(\frac{3a+b}{4}\right)$ (4 分)



二、已知數線上有相異四點 $A(x)$，$B(2x)$，$C(-1)$，$D(3)$，試回答下列各式：

(一) 請以絕對值表示線段 $\overline{AC}$ 長 (3 分)

$\overline{AC}=|x-(-1)|=|x+1|$

(二) 若 $\overline{AC}+\overline{BD}=7$，則 $x=$？(5 分)

依題意，$|x+1|+|2x-3|=7$

(1)若 $x\ge\frac{3}{2}$，則 $(x+1)+(2x-3)=7\Rightarrow x=3$(合)

(2)若 $-1\le x<\frac{3}{2}$，則 $(x+1)+(3-2x)=7\Rightarrow x=-3$(不合)

(3)若 $x<-1$，則 $-(x+1)+(3-2x)=7\Rightarrow x=-\frac{5}{3}$(合)

所以答案為 $x=3$ 或 $-\frac{5}{3}$

三、設 x,y 為不相等的兩正數，算數平均數 $A_n=\frac{x+y}{2}$，幾何平均數 $G_n=\sqrt{xy}$，調和平均數 $H_n=\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{2xy}{x+y}$，試比較 A_n,G_n,H_n 之大小。(8 分)

因為 x,y 為不相等的兩正數，故算幾不等式成立，$\frac{x+y}{2}>\sqrt{xy}$ (無等號)

依題意知 $\frac{1}{x},\frac{1}{y}$ 皆大於零，所以 $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}>\sqrt{\frac{1}{xy}}\Rightarrow\frac{1}{\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}}<\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{xy}}}$

$\Rightarrow\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}<\sqrt{xy}\Rightarrow\frac{2xy}{x+y}<\sqrt{xy}\Rightarrow G_n>H_n$

所以 $A_n>G_n>H_n$

四、(加分題) 董哥與朋友參加密室逃脫遊戲，碰到一關卡需在 5 分鐘內解出一數學題後輸入答案，正確即可過關，題目是「設 a、b 為正實數，試求 $\left(a+\frac{4}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)$ 的最小值為多少？」，董哥友人作法如下：

利用算幾不等式可得知：

$$\frac{a+\frac{4}{b}}{2}\ge\sqrt{a\times\frac{4}{b}}=\sqrt{\frac{4a}{b}}\quad\text{以及}\quad\frac{b+\frac{9}{a}}{2}\ge\sqrt{b\times\frac{9}{a}}=\sqrt{\frac{9b}{a}}$$

所以將上面兩式相乘，可得

$$\frac{\left(a+\frac{4}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)}{4}\ge\sqrt{\frac{4a}{b}}\times\sqrt{\frac{9b}{a}}=6$$

可知 $\left(a+\frac{4}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)$ 的最小值為 **24**

請問可以順利過關嗎？如果不行，聰明的你(妳)請說明錯誤之處並提供正確作法幫忙過關吧！(8 分)

Ans：不可過關，因為兩個算幾不等式等號成立條件不同，無法同時成立。(第一個 $ab=4$，第二個 $ab=9$)

正確：$\left(a+\frac{4}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)=ab+9+4+\frac{36}{ab}=ab+\frac{36}{ab}+13$

$\frac{ab+\frac{36}{ab}}{2}\ge\sqrt{36}\Rightarrow ab+\frac{36}{ab}\ge12$，故所求 $\left(a+\frac{4}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)$ 最小值為 $25_{\#}$