

## 例10 (算幾不等式)

若  $a, b$  是非負的實數，則  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$   
且當  $a=b$  時，等號才成立

$$\begin{aligned} \text{證：} \quad \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{a+b}{2} - \frac{2\sqrt{ab}}{2} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \end{aligned}$$

$$(1) \quad a \neq b \Rightarrow \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} > 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

## 例10 (算幾不等式)

若  $a, b$  是非負的實數，則  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$   
且當  $a=b$  時，等號才成立

$$\begin{aligned} \text{證：} \quad \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{a+b}{2} - \frac{2\sqrt{ab}}{2} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \end{aligned}$$

$$(2) \quad a=b \Rightarrow \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$$

# 直角三角形相似性質

$\triangle DAB$ 中 若 $\angle ADB = 90^\circ$   $\overline{CD} \perp \overline{AB}$  則

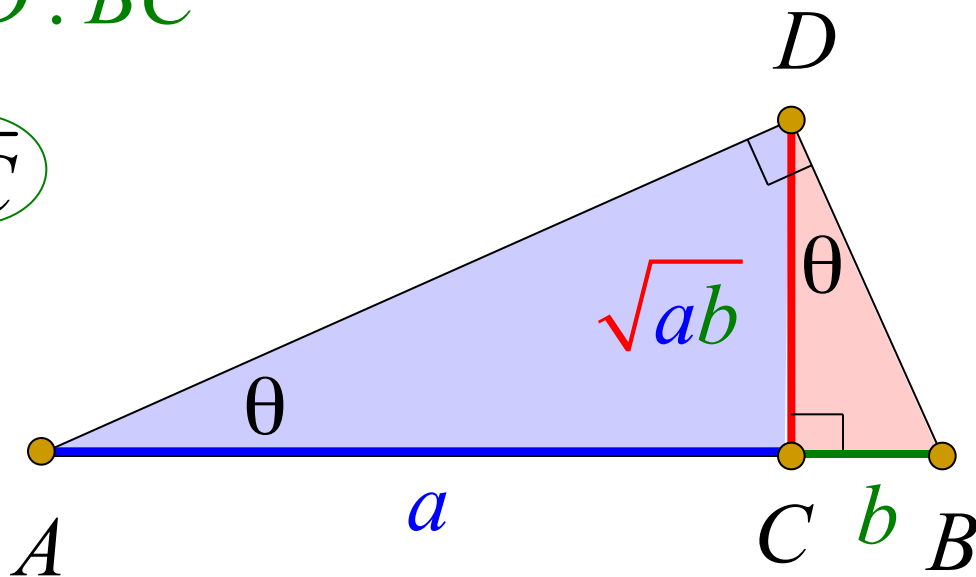
(1)  $\underline{\triangle ACD} \sim \underline{\triangle DCB}$

(2)  $\overline{AC} : \overline{CD} = \overline{CD} : \overline{BC}$

(3)  $\overline{CD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{BC}$

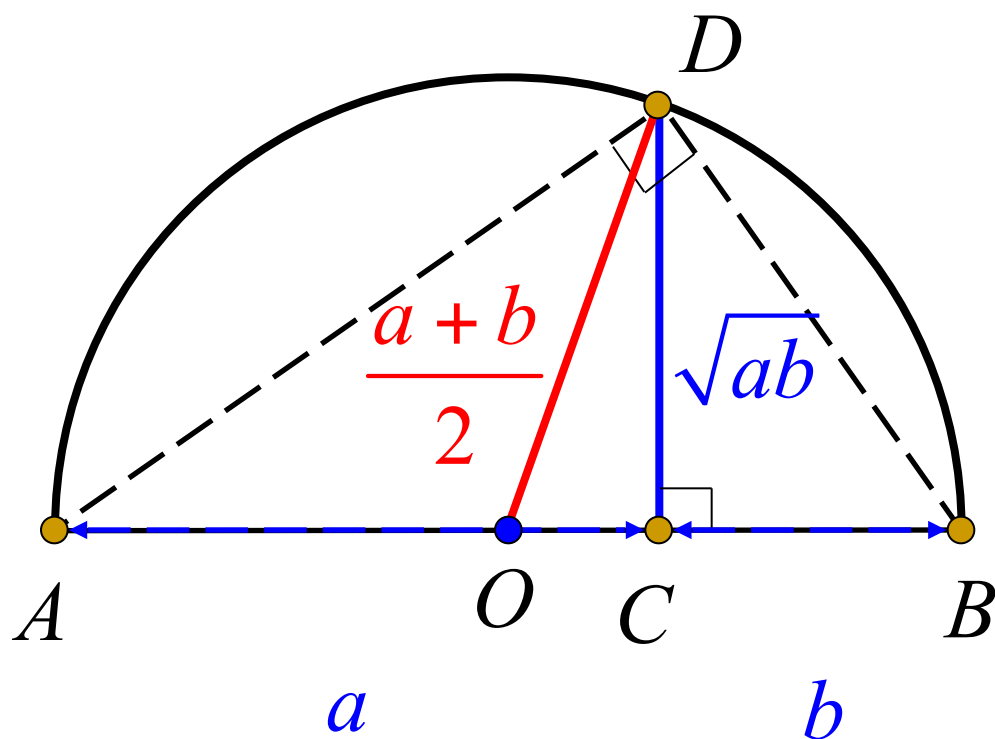
$a$        $b$

(4)  $\overline{CD} = \sqrt{ab}$

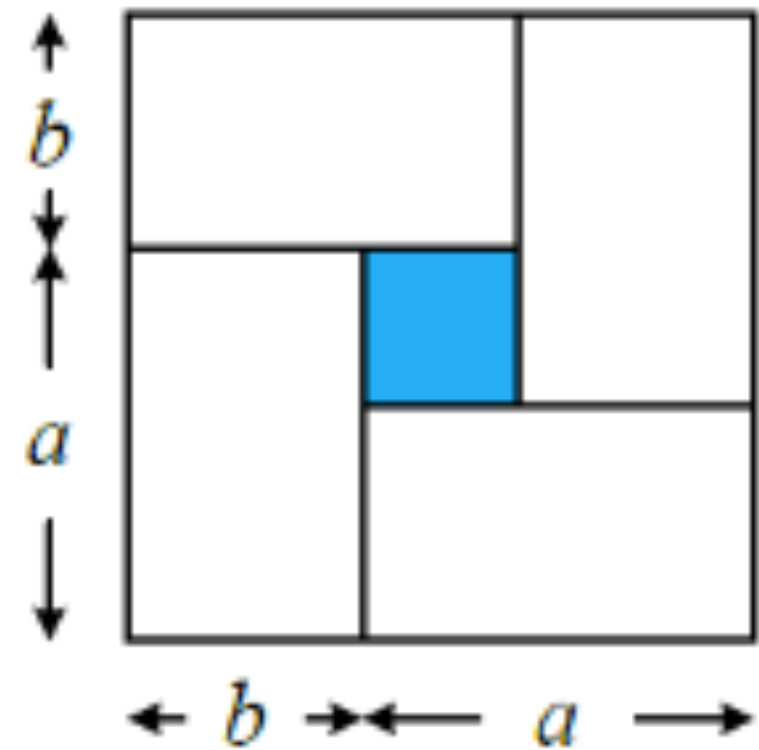


# 算幾不等式\_幾何證明

$$a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \left( a = b \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \right)$$

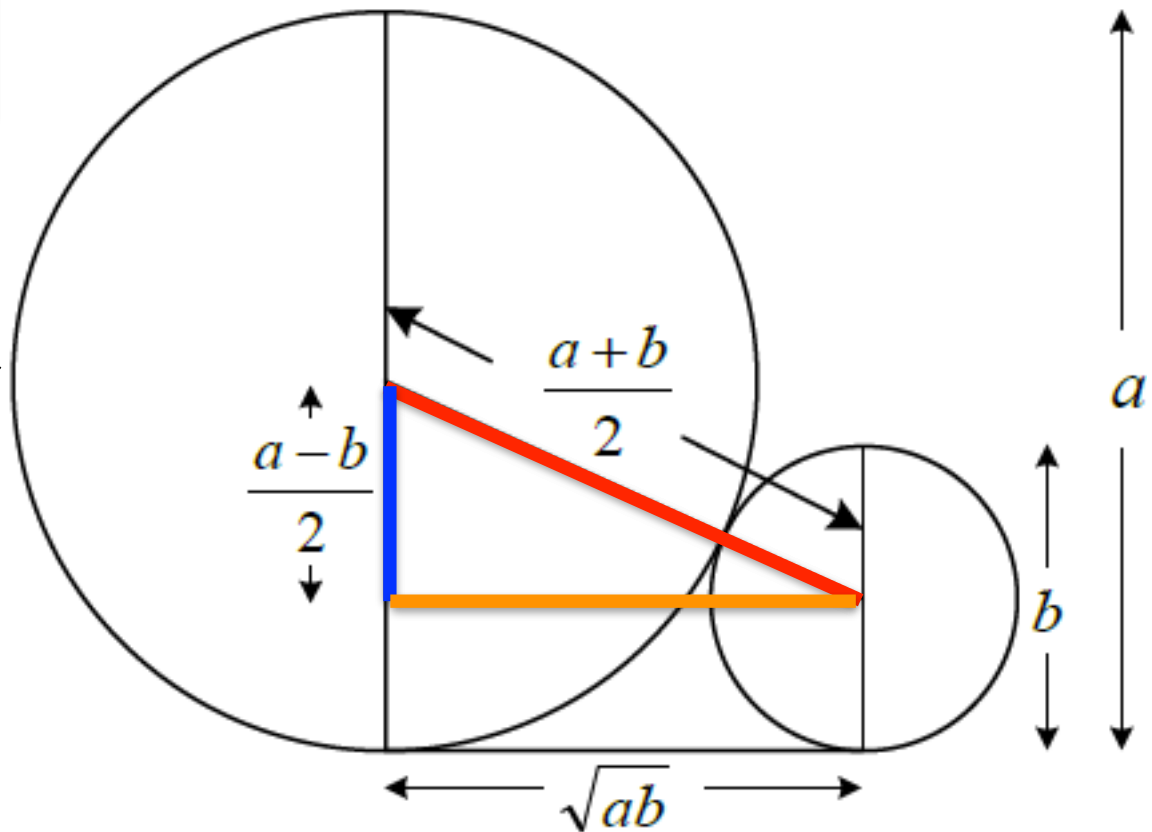


算幾不等式還有很多不同證明方式，有興趣同學可參閱 [goo.gl/jedKwr](http://goo.gl/jedKwr)



$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$$



算幾不等式還有很多不同證明方式，有興趣同學可參閱



## 例11

(1) 已知  $a, b$  是正實數且  $ab=16$ ，求  $a+b$  的最小值。

$$\text{解： } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \Rightarrow \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{16} = 4$$

$$\Rightarrow a+b \geq 8 \Rightarrow a+b \text{ 的最小值為 } 8$$

(2) 面積為 16 的所有矩形中，哪一種矩形的周長為最短？

解： 當矩形的長、寬相等(即為正方形)時，  
其周長最短。

## 隨11

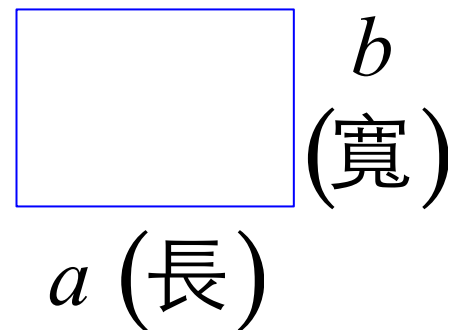
一條長為 24 公尺的繩子，所能圍出的矩形面積最大是多少？這個有最大面積的矩形長、寬各為幾公尺？

解：  $2(a + b) = 24 \Rightarrow a + b = 12$

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{12}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow 36 \geq ab$$

$$36 = ab \Rightarrow a = b$$



$$\begin{cases} a = b \\ a + b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 6 \end{cases}$$