

壹、是非題：(對的畫 O，錯的畫 X，需說明判斷方式或理由)

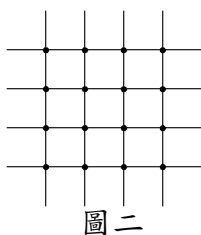
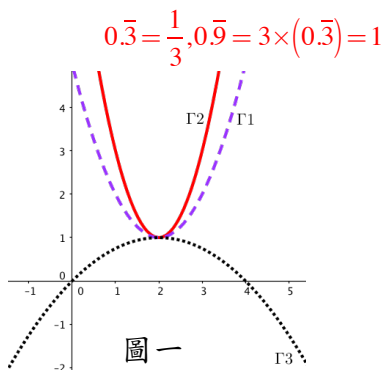
一、圖一為三個共頂點的拋物線函數，分別為

$\Gamma_1: y = a_1(x-2)^2 + 1, \Gamma_2: y = a_2(x-2)^2 + 1, \Gamma_3: y = a_3(x-2)^2 + 1$, 試判斷下列各題的正確性.

- (一) O $a_1 > 0$. Γ_1 開口向上
(二) X $a_3 > 0$. Γ_3 開口向下
(三) O $a_2 > a_1 > a_3$. Γ_1, Γ_2 開口向上且 Γ_2 開口較小, Γ_3 開口向下, 所以 $a_2 > a_1 > a_3$
(四) O $a_1 + a_3 > 0$. Γ_1 開口較 Γ_3 小, $|a_1| > |a_3|$, 所以 $a_1 + a_3 > 0$

二、請判斷各選項正確與否.

- (一) X $x \neq 0, \frac{y}{x}$ 為有理數. x, y 需為整數
(二) O $1.\overline{06}$ 為有理數. $1.\overline{06}$ 為無限循環小數, 是有理數
(三) X $0.\overline{9} < 1$. $0.\overline{3} = \frac{1}{3}, 0.\overline{9} = 3 \times (0.\overline{3}) = 1$
(四) O 實數可以比大小.



貳、填充題：(每格 6 分，共 60 分)

一、圖二是坐標平面上的十六個點(左、右、上、下間隔均相等)，這些點中任意二點連成之直線不考慮無斜率的情形，則斜率最小者為下列哪一個選項數值？

- (A) -4. (B) -3. (C) -2. (D) -2/3. (E) -1. ANS: (B)

二、設函數 f(x) 的定義：「f(1)=5, f(2)=2, f(3)=4, f(4)=1, f(5)=3, 若 u_0=3 且對於 n ≥ 0, 均有 u_{n+1}=f(u_n)」, 則 u_{2016} = 3。

三、某次數學考試學生成績低落，最高 40 分，最低 15 分，所以董哥老師想要採一次函數來加分，使 40 分變成 100 分，15 分變成 60 分，請回答下列各題：

- (一) 董哥老師加分的一次函數為 y = 8x + 180.
(二) Jay 加分後分數落在 70~80 分，已知原始分數都是整數，請幫忙推算 Jay 原始分數可能為 22, 23, 24, 25, 26, 27。

四、將 y = x^2 + x + 1 的圖形沿 x 軸向右平行移動 a 單位，沿 y 軸向上平行移動 b 單位後與 y = x^2 - x - 1 的圖形重疊，試問數對 (a, b) = (1, -2)。

五、設 a, b 為實數，若 |ax + 4| > b 的解為 x < -2 or x > 6，則數對 (a, b) = (-2, 8)。

六、試求 y = |x| - |x - 5| 的範圍 -5 ≤ y ≤ 5。

七、解方程式 2|x + 1| + |x - 2| + 2x = 8，則 x = 4/3 或 -8。

八、設 a, b, c 為實數，若 a + b + c = 6, ab + bc + ca = 11，則 a^2 + b^2 + c^2 = 14。

九、已知 x = (sqrt(5) - sqrt(3)) / (sqrt(5) + sqrt(3))，則 x^2 + 1/x^2 = 62。

參、計算說明題：(需有過程才給分)

一、解不等式：|2x - 2| ≤ |x - 3| (8 分)

- ① x ≥ 3 2x - 2 ≤ x - 3 ⇒ x ≤ -1 (不合)
② 1 ≤ x < 3 2x - 2 ≤ -(x - 3) ⇒ x ≤ 5/3 ∴ 1 ≤ x ≤ 5/3
③ x < 1 -(2x - 2) ≤ -(x - 3) ⇒ x ≥ 1 -1 ≤ x < 1

由①, ②, ③得知 -1 ≤ x ≤ 5/3

二、設實數 x, y 滿足 |x - 3| ≤ 2, |2y - 3| ≤ 1，試回答下列各式：

- (一) x 的範圍。(2 分)
(二) y 的範圍。(2 分)
(三) y/x 的範圍。(4 分)
(四) xy - 2x + 3y - 6 的範圍。(5 分) hint: 因式分解

作答過程：

- (一) -2 ≤ x - 3 ≤ 2 ⇒ 1 ≤ x ≤ 5
(二) -1 ≤ 2y - 3 ≤ 1 ⇒ 1 ≤ y ≤ 2

- (三) y/x = (y-0)/(x-0) 表示 (x, y) 到 (0, 0) 的斜率 1/5 ≤ y/x ≤ 2
(四) xy - 2x + 3y - 6 = (x+3)(y-2) 4 ≤ x+3 ≤ 8 又 -1 ≤ y-2 ≤ 0 ⇒ -8 ≤ (x+3)(y-2) ≤ 0 ∴ -8 ≤ xy - 2x + 3y - 6 ≤ 0

三、設二次函數 y = f(x) 的圖形通過 (2, 3)、(1, 0)、(4, 3) 三點，試求下列各式之值：

- (一) f(x) 與 x 軸交點。(2 分)
(二) f(x)。(6 分)
(三) 頂點座標。(2 分)
(四) 對稱軸方程式。(2 分)

作答過程：

- (一) 由題意知對稱軸為 x = 3，所以此圖必過 (5, 0)，即 f(x) 與 x 軸交點為 (1, 0) 與 (5, 0) #
(二) 令 y = a(x - 3)^2 + b (x, y) = (2, 3)、(1, 0) 解聯立 得 a = -1, b = 4 ⇒ y = -(x - 3)^2 + 4 = -x^2 + 6x - 5 #

- (三) 由(二)得知頂點座標為 (3, 4) #
(四) 由題意知對稱軸為 x = 3 #