講義P59例題16

多項式 $f(x)$除以 $x+1$的餘式為6；除以$x-3$的餘式為-2，求 $f(x)$除以$(x+1)(x-3)$的餘式。

講義P60例題18

多項式 $f(x)$除以$x-2$的餘式為10；除以x^2+x+1的餘式為$x+1$，求$f(x)$除以$(x-2)\left(x^2+x+1\right)$的餘式

講義P60例題17

多項式 $f(x)$除以x^2-x-2的餘式為$4x+7$，除以x^2-1的餘式為$x+4$，求$f(x)$除以x^2-3x+2的餘式。

補充題

多項式 $f(x)$除以$x+2$的餘式為-12；除以$x-2$的餘式為8；除以$x-4$的餘式為-6；求$f(x)$除以$(x+2)(x-2)(x-4)$的餘式。

課本P78-因式定理

課本P79例題12

設 $f(x)=x^{13}+2x^3+3$，分別檢查 $x-1$ 與 $x+1$ 是否為 $f(x)$ 的一次因式？

請練習：講義P61例題19

因式性質

重要性質

若 a，b 是兩個不同的實數，且多項式 $f(x)$ 滿足 $f(a)=f(b)=0$，則 $(x-a)(x-b)$ 是 $f(x)$ 的因式.

因式定理的推廣

若 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 是 n 個不同的實數，且多項式 $f(x)$ 滿足 $f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=0$，則 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ 是 $f(x)$ 的因式.

講義P62例題20

三次多項式$f(x)$滿足$f(1)=f(2)=0$,$f(3)=4$與$f(4)=36$ ，求$f(5)$。

補充題

三次多項式$f(x)$滿足

$f(-1)=f(2)=f(3)=5$且

$f(4)=-25$，求$f(x)$。

課本P81-整係數一次因式檢查法

$$2x^2 - x - 15 = (2x+5)(x-3)$$

$$6x^3 + 13x^2 + 9x + 35$$

$$= (2x+5)\left(3x^2 - x + 7\right)$$

牛頓定理（或稱整係數一次因式檢查法）

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一個整係數 n 次多項式．若一次式 $ax-b$ 是 $f(x)$ 的因式（其中 a 是正整數，b 是整數且 a，b 互質），則

(1) a 是 $f(x)$ 的最高次項係數 a_n 的因數．

(2) b 是 $f(x)$ 的常數項 a_0 的因數．

2個重點！

課本P82例題14

例題 14

求 $f(x)=2x^3-3x^2-8x-3$ 的整係數一次因式.

請練習：講義P63例題21

科學Online 科技部高瞻自然科學教學資源平台

輸入關鍵字

首頁 | 高瞻專區 | 化學 | 物理 | 數學 | 生命科學 | 地球科學 | 環境能源 | 關於我們

一次因式檢驗法與有理根判別法（Linear factor test and determination of rational root）

Posted on 2010/11/30 in 函數, 多項式函數, 數學 22,345 views

Print PDF

一次因式檢驗法與有理根判別法（Linear factor test and determination of rational root）

國立台南第一高級中學數學科林倉億老師/國立台灣師範大學數學系退休教授洪萬生責任編輯

「一次因式檢驗法」與「有理根判別法」其實是一體的兩面，說得明白一點，當 $ax-b$（a 與 b 是互質的整數）是 $f(x)$ 的一次因式，那 $\dfrac{b}{a}$ 不就是 $f(x)=0$ 的有理根嗎？反之亦然。

熱門文章

- 分子間作用力
- 細胞大掃除：自噬作用
- 酸鹼滴定
- 立方晶體
- 腎素-血管收縮素-醛固酮系統
- 準確度和精確度
- 細胞膜運輸物質的方式

有講徵答

為什麼要學一次因式檢驗法？

課本P83練習題

練習

求 $f(x)=2x^4-x^3-2x+1$ 的整係數一次因式.

講義P63例題22

設 k 為正整數，若多項式 $f(x)=x^4-x^3-kx^2+2kx-2$ 有整係數一次因式，求 k 值。

課本P83-插值多項式

插值多項式 (Interpolating polynomial)

國立臺南第一高級中學數學科林倉億老師/國立臺灣師範大學數學系退休教授洪萬生責任編輯

例題1：在坐標平面上給定三個點 $A(1,-2)$，$B(2,3)$ 與 $C(3,12)$，如何找到一個二次多項式使得其圖形通過這三個點？

解此題最簡單的想法，不外是假設所求多項式

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

然後將 A，B，C 三點代入，

得三元一次聯立方程式 $\begin{cases} a+b+c=-2\cdots\cdots(1) \\ 4a+2b+c=3\cdots(2) \\ 9a+3b+c=12\cdots(3) \end{cases}$

利用加減消去法即可求得 $a=2,b=-1,c=-3$

插值多項式 (Interpolating polynomial)

國立臺南第一高級中學數學科林倉億老師/國立臺灣師範大學數學系退休教授洪萬生責任編輯

這方法不錯，但有個缺點，就是要假設三個未知數，然後辛苦地解聯立方程式。今若將題目改成：

例題2：在坐標平面上給定四個點 $A(1,10)$，$B(2,26)$，$C(3,58)$ 與 $D(4,112)$，如何找到一個三次多項式使得其圖形通過這四個點？

這時再要用上述的方法，光用想的就有點累了，更何況如果推廣到一般情況：給定 n+1個點，找一個 n 次多項式使得其圖形通過這 n+1 個點。比如說 n=100 時，若真要用上述的方法，不但需要很大的勇氣、毅力，更需要一張很大很大的計算紙，才能容納有 101 個方程式的聯立方程組，而這才只是第一步，更累的還在後頭⋯⋯。

插值多項式 (Interpolating polynomial)

國立臺南第一高級中學數學科林倉億老師/國立臺灣師範大學數學系退休教授洪萬生責任編輯

為了應付上述這種問題，兩個偉大的數學家—牛頓（Issac Newton, 1643~1727）與拉格朗日（Joseph Louis Lagrange）分別想出了不同的方法。

例題1：在坐標平面上給定三個點 $A(1,-2)$，$B(2,3)$ 與 $C(3,12)$，如何找到一個二次多項式使得其圖形通過這三個點？

牛頓（Issac Newton, 1643~1727）插值多項式

拉格朗日(Joseph Louis Lagrange)插值多項式

插值多項式 (Interpolating polynomial)

國立臺南第一高級中學數學科林倉億老師/國立臺灣師範大學數學系退休教授洪萬生責任編輯

例題1：在坐標平面上給定三個點 $A(1,-2)$，$B(2,3)$ 與 $C(3,12)$，如何找到一個二次多項式使得其圖形通過這三個點？

牛頓（Issac Newton, 1643~1727）插值多項式

$$\boxed{\text{設}\, f(x)=a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c}$$

將 A,B,C 三點代入得

$$\begin{cases} c=-2 \\ b+c=3 \\ 2a+2b+c=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-2 \\ b=5 \\ a=2 \end{cases}$$

牛頓方法的好處在於巧妙的假設多項式，大幅減化了計算。

$$\therefore f(x)=2(x-1)(x-2)+5(x-1)-2=2x^2-x-3$$

插值多項式 (Interpolating polynomial)

國立臺南第一高級中學數學科林倉億老師/國立臺灣師範大學數學系退休教授洪萬生責任編輯

例題1：在坐標平面上給定三個點 $A(1,-2)$，$B(2,3)$ 與 $C(3,12)$，如何找到一個二次多項式使得其圖形通過這三個點？

拉格朗日(Joseph Louis Lagrange)插值多項式

$$f(x)=(-2)\times\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+3\times\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$$

$$+12\times\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}=2x^2-x-3$$

牛頓的巧妙已夠令人驚豔了，但拉格朗日更青出於藍，連假設都不用，直接寫出所求的多項式

拉格朗日(Joseph Louis Lagrange)插值多項式

例題1：在坐標平面上給定三個點 $A(1,-2)$，$B(2,3)$ 與 $C(3,12)$，如何找到一個二次多項式使得其圖形通過這三個點？

找 $k_1(x), k_2(x), k_3(x)$ 滿足

多項式 \ x	1	2	3
$k_1(x)$	1	0	0
$k_2(x)$	0	1	0
$k_3(x)$	0	0	1

使得 $f(x)=a\times k_1(x)+b\times k_2(x)+c\times k_3(x)$

所以 $a=f(1)=-2$，$b=f(2)=3$，$c=f(3)=12$

即 $f(x)=(-2)\times k_1(x)+3\times k_2(x)+12\times k_3(x)$

拉格朗日(Joseph Louis Lagrange)插值多項式

例題1：在坐標平面上給定三個點 $A(1,-2)$，$B(2,3)$ 與 $C(3,12)$，如何找到一個二次多項式使得其圖形通過這三個點？

$$f(x)=(-2)\times k_1(x)+3\times k_2(x)+12\times k_3(x)$$

$$k_1(1)=1, k_1(2)=0, k_1(3)=0$$

多項式 \ x	1	2	3
$k_1(x)$	1	0	0
$k_2(x)$	0	1	0
$k_3(x)$	0	0	1

由因式定理的推廣可設

$$k_1(x)=a(x-2)(x-3)$$

又 $k_1(1)=1\Rightarrow a(1-2)(1-3)=1$

$\therefore a=\dfrac{1}{(1-2)(1-3)}$，即 $k_1(x)=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}$

拉格朗日(Joseph Louis Lagrange)插值多項式

例題1：在坐標平面上給定三個點 $A(1,-2)$，$B(2,3)$ 與 $C(3,12)$，如何找到一個二次多項式使得其圖形通過這三個點？

$$f(x)=(-2)\times k_1(x)+3\times k_2(x)+12\times k_3(x)$$

$$k_1(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}$$

同理 $$k_2(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$$

$$k_3(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

多項式 \ x	1	2	3
$k_1(x)$	1	0	0
$k_2(x)$	0	1	0
$k_3(x)$	0	0	1

所以

$$f(x)=(-2)\times\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+3\times\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+12\times\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

課本P85例題15

例題 15

已知三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1)=7$，$f(2)=6$，$f(3)=11$，$f(4)=28$，求 $f(5)$ 的值.

請練習：講義P65例題24

課本P87例題16

例題16

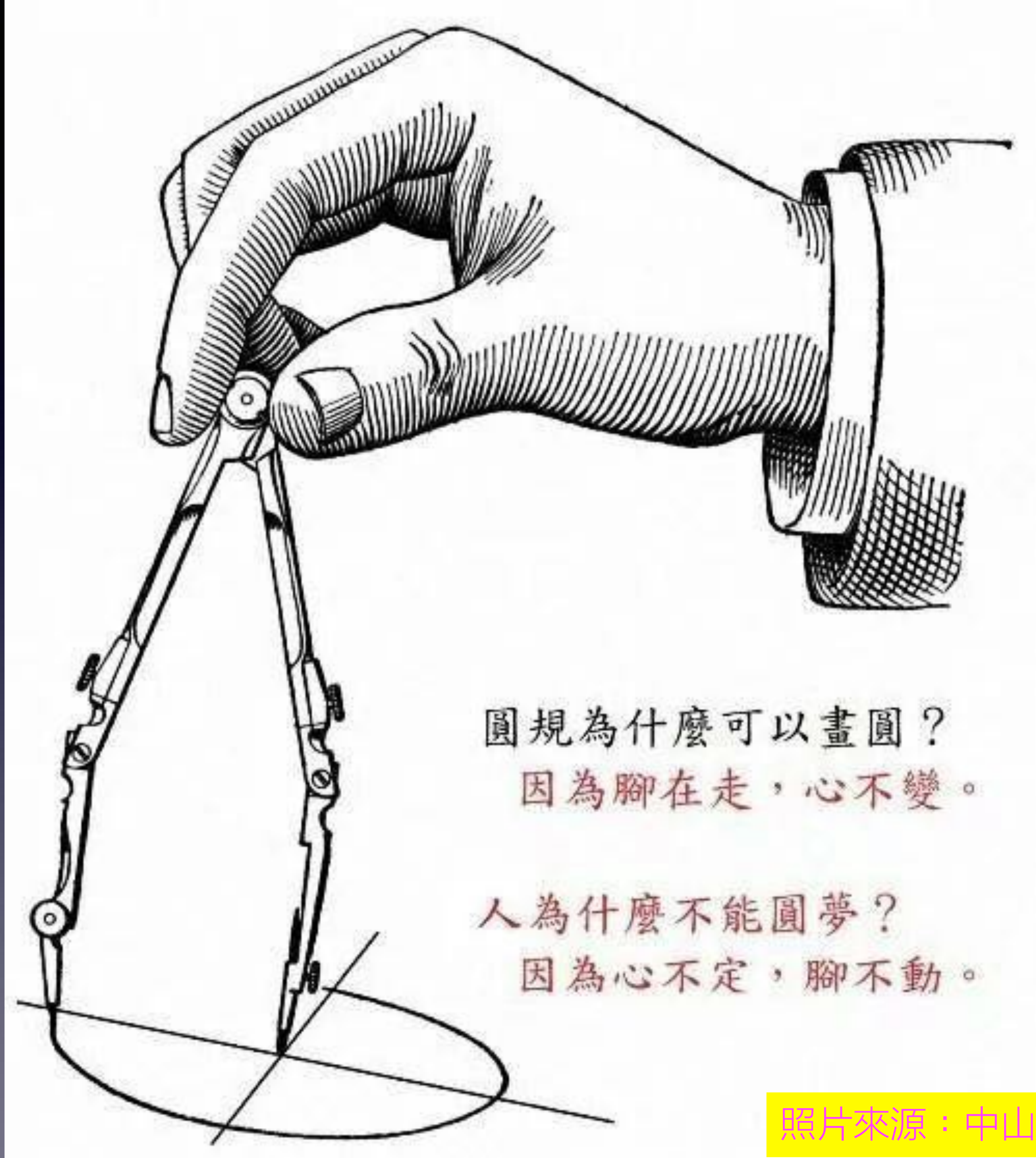
下表是某燒瓶中的水冷卻時，在三個時間點水溫的紀錄表：

時間 x（分）	5	6	8
水溫 y（°C）	77	68	32

(1) 求滿足 $f(5)=77$，$f(6)=68$，$f(8)=32$ 的二次函數 $f(x)$.

(2) 借用(1)中的 $f(x)$ 估計當時間 $x=7$（分）時的水溫.

請練習：課本P87練習題



照片來源：中山大學JUDY教授