

數學平時卷 高一下 Ch1-1 ~ Ch1-2

一年 15 班 _____ 號姓名 _____

一、是非題：每題 2 分，共 14 分。

設 $\{a_n\}$ 為一個數列，共有 100 項，請判斷下列敘述何者正確？

1. X 已知 $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5$ ，則 $a_4 = 7$
2. X 若 $\{a_n\}$ 為等差數列，則 $a_1 + a_{100} = a_2 + a_{99} = \dots = 2a_{50}$
3. O 若 $\{a_n\}$ 為等差數列，則 a_1, a_3, a_5, a_7, a_9 亦為等差數列
4. O 若 $\{a_n\}$ 為等差數列，公差為 d ，則新數列 $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, a_7 + a_8, \dots, a_{99} + a_{100}$ 亦為等差數列，新數列的公差為 $4d$
5. X 若 $\{a_n\}$ 為等比數列，公比為 r ，則 $a_{100} = a_1 \times r^{100}$
6. O 若 $\{a_n\}$ 為等比數列，則 $a_1 \times a_{100} = a_2 \times a_{99} = \dots = a_{50} \times a_{51}$
7. O 若 $\{a_n\}$ 為等差數列，則新數列 $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, 2^{a_4}, 2^{a_5} \dots$ 為等比數列

二、填充題：每格 6 分，共 66 分。

1. 有一數列 $\langle a_n \rangle : 3, 5, 9, 17, 33, \dots$ ，則 (1) $a_7 = \underline{129}$ ；
(2) $a_n = \underline{2^n + 1}$ (以 n 表示)。
2. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1, a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1} (n \geq 2)$ ，試問 $a_{115} = \underline{\frac{1}{115}}$ 。
3. 在 4 與 256 之間依序插入 11 個數，使此 13 個數成為一等比數列，試問：
(1) 公比為 $\underline{\sqrt{2}}$ (2) 此等比級數和為 $\underline{508 + 252\sqrt{2}}$ 。
4. 設 $\langle a_n \rangle$ 是一個等比數列，若 $a_1 + a_2 + a_3 = 18, a_2 + a_3 + a_4 = -9$ ，則
(1) 公比為 $\underline{-\frac{1}{2}}$ (2) $a_3 + a_4 + \dots + a_{14} = \underline{\frac{4095}{1024}}$ 。
5. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一等比數列， $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2047$ ，則 n 值為 $\underline{10}$ 。
6. 一等差數列 $\langle a_n \rangle$ ，若 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 270, a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 255$ ，則此數列的首項為 $\underline{66}$ 。
7. 某三正數成等差數列，其和為 36，若各項依次加 1、4、43 後，三數成等比數列，求此三數為 $\underline{3, 12, 21}$ 。

數學平時卷 高一下 Ch1-1 ~ Ch1-2

8. 購買一棟房屋，先付頭期款 100 萬元，剩餘以 20 期分期付款方式繳納；已知分期付款每期的金額成等差數列， a_n 表第 n 期需繳的金額，若 $a_1 + a_2 = 58$ ， $a_3 + a_4 = 54$ ，則 $a_5 = \underline{\frac{51}{2}}$ 。(單位：萬元)

三、證明題：設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$ ， $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1}$ ， $n \geq 2$ ，試回答下列問題：

(一) 求 a_2 ， a_3 ， a_4 。(3 分)

(二) 以 n 表示 a_n ， n 為正整數，求 a_n 。(3 分)

(三) 承上題，試以數學歸納法，證明你的結論是對的。(10 分)

解答：(一) $a_2 = \frac{a_1}{a_1+1} = \frac{1}{2}$ ， $a_3 = \frac{a_2}{a_2+1} = \frac{1}{3}$ ， $a_4 = \frac{a_3}{a_3+1} = \frac{1}{4}$ #

(二) $a_n = \frac{1}{n}$ #

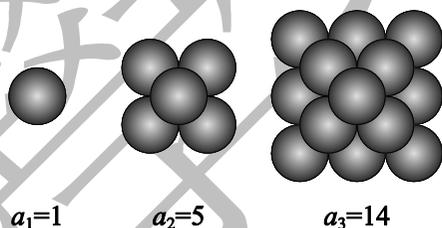
(三) 當 $n = 1$ ， $a_1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = 1$ ，成立

設 $n = k$ 成立，即 $a_k = \frac{1}{k}$

則 $n = k + 1$ 時， $a_{k+1} = \frac{a_k}{a_k+1} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}+1} = \frac{1}{1+k}$ 成立

由數學歸納法原理得證 對於正整數 n ， $a_n = \frac{1}{n}$ #

四、計算題：如下圖將球堆成方垛（表每一層皆為正方形），設 a_n 為堆 n 層方垛的球數，觀察可得遞迴關係式 $a_1 = 1$ ， $a_n = a_{n-1} + n^2$ ($n \geq 2$)，求 a_6 。(8 分)



$$\begin{aligned} \dots \quad a_4 &= a_3 + 4^2 = 30 \\ a_5 &= a_4 + 5^2 = 55 \\ a_6 &= a_5 + 6^2 = 91 \# \end{aligned}$$

五、加分題：課後閱讀文章提到「在日本寺廟或神社常見繪馬，自江戶時代起，為表示酬謝神明，人們在匾額上書寫數學問題，這種數學風貌的繪馬稱作 算額。

六、加分題：20 位前鎮高中美術班學生假日到前鎮國小彩繪牆面，以 (大)藍鯨 為主題以呼應高雄海洋城市的特色。影片受訪學生為 洪孜慧。(每格 2 分)