數學平時卷 高一下 Ch1－1～Ch1－2

一年 6 班_____號姓名_______________

一、是非題：每題 6 分，共 18 分。

__245__ 1. 下列選項哪些正確？ (1) $\sum_{k=1}^{4} a_k = \sum_{k=3}^{6} a_k$ (2) $\sum_{k=1}^{4} a_k = \sum_{k=2}^{5} a_{k-1}$

(3) $\sum_{k=2}^{5} k^2 = \sum_{k=3}^{6} k^2$ (4) $\sum_{k=2}^{5} k^3 = \sum_{k=1}^{4} (k+1)^3$ (5) $\sum_{k=1}^{5} (3k+10) = \sum_{k=1}^{5} (28-3k)$

__123__ 2. 已知一等差數列共有 59 項，滿足公差 $d>0$，且 $a_{29}+a_{30}+a_{31}=0$，選出正確的選項： (1) $a_{59}>0$ (2) $a_1<0$ (3) $a_{30}=0$

(4) $\sum_{k=1}^{58} a_k > 0$ (5) $a_{18}+a_{19}+a_{20}=0$

__1345__ 3. 將一個長度為 1024 的線段，取其 $\frac{1}{2}$ 圍成一個正方形；再將剩下的線段，取其 $\frac{1}{2}$ 圍成一個正方形； 如此繼續下去，設 a_n 為第 n 次所圍成正方形的周長，b_n 為第 n 次所圍成正方形的面積：

(1) $\langle a_n \rangle$ 是等比數列，公比為 $\frac{1}{2}$ (2) $\langle b_n \rangle$ 是等比數列，公比為 $\frac{1}{2}$

(3) $a_6=b_6$ (4) $a_{10}>b_{10}$ (5) $a_3 > \sum_{k=4}^{10} a_k$

二、填充題：每格 6 分，共 72 分。

1. 求在 50～250 之間，所有 6 的倍數總和為__4950__。

2. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列，若 $a_2 = -\frac{1}{4}$，$a_5 = \frac{1}{32}$，且公比 r 為實數，試求 $\sum_{k=1}^{10} a_k =$ __$\frac{341}{1024}$__。

3. 計算下列各式的值：

(1) $\sum_{k=1}^{10} (\frac{1}{2})^k =$ __$\frac{1023}{1024}$__ (2) $1\times3+2\times5+3\times7+4\times9+\ldots+30\times61=$ __19375__

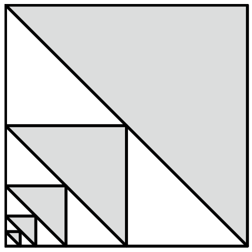
(3) $11^3+12^3+\ldots+20^3=$ __41075__ (4) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{99\times101}=$ __$\frac{50}{101}$__

(5) $\frac{2^2}{1}+\frac{2^2+4^2}{2}+\frac{2^2+4^2+6^2}{3}+\ldots+\frac{2^2+4^2+\quad+18^2}{9}=$ __476__。

4. 設 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{n+1}$，則 $a_7=$ __$\frac{1}{56}$__。

5. 數列〈 a_n 〉之前 n 項和 $S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n = n^2+1$，求： (1) $a_4=$ __7__

(2) $a_n=$ __$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2n-1 (n\geq 2) \end{cases}$__。



6.右圖是邊長為 2 的正方形，圖形中有 5 個黑色的三角形(均為相似三角形)，求白色部分的面積 =__$\frac{171}{128}$__平方單位。

7.小王每年年初固定在銀行存入10000元，年利率2%，每年複利計息一次，求第10年年底的本利和為__112200__元。

（已知$(1.02)^{10} \approx 1.22$）

解析：所求為$10000(1.02)^{10}+10000(1.02)^{9}+10000(1.02)^{8}+\cdots+10000(1.02)$

$$=\frac{10000(1.02)\left[(1.02)^{10}-1\right]}{1.02-1}=\frac{10000(1.02)(0.22)}{0.02}=112200 \text{ 元．}$$

三、證明題：使用數學歸納法證明「對所有正整數n，

$$1\times2+3\times4+5\times6+\cdots+(2n-1)\times2n=\frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$$」（10 分）

① 當$n=1$時，左式$=1\times2=2$，右式$=\frac{1\times2\times3}{3}=2$，原式成立．

② 設$n=k$時原式成立，即$1\times2+3\times4+\cdots+(2k-1)\times2k=\frac{k(k+1)(4k-1)}{3}$，

則$n=k+1$時，左式$=1\times2+3\times4+\cdots+(2k-1)\times2k+\left[2(k+1)-1\right]\times2(k+1)$

$$=\frac{k(k+1)(4k-1)}{3}+(2k+1)\times2(k+1)=(k+1)\times\left[\frac{k(4k-1)}{3}+2(2k+1)\right]$$

$$=\frac{(k+1)(4k^2+11k+6)}{3}=\frac{(k+1)(k+2)(4k+3)}{3}$$

$$=\frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[4(k+1)-1\right]}{3}=\text{右式原式也成立．}$$

故由數學歸納法可知，對於所有正整數n，

$$1\times2+3\times4+5\times6+\cdots+(2n-1)\times2n=\frac{n(n+1)(4n-1)}{3}\text{恆成立．}$$

數學平時卷 高一下 Ch1－1～Ch1－2

四、計算題(需寫出計算或思考過程)： 有一隻螞蟻在坐標平面上由原點$(0,0)$出發，沿著x軸正向（即正東）的方向走了1分鐘，然後立即轉向正北，再走2分鐘，然後再轉向正西方向走4分鐘，再轉向正南方向走8分鐘，再轉向正東方向走16分鐘，依此法則走下去，且每分鐘走1公尺，速率不變且轉彎時間不計，那麼，牠走了511分鐘時，牠的位置為何？（以坐標表示）（設單位為公尺）（8分）

如右圖，

∵每分鐘走1公尺，

且$1+2+2^2+\cdots+2^8=2^9-1=511$，

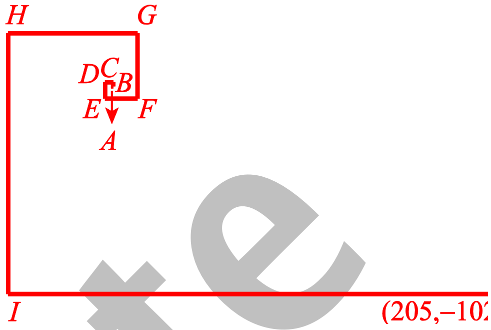
∴依序走1，2，2^2，2^3，…，2^7，2^8公尺，

考慮方向，

故x坐標為$1-2^2+2^4-2^6+2^8=205$，

y坐標為$2-2^3+2^5-2^7=-102$，

所以走了511分鐘時，位置在$(205,-102)$．



五、加分題： 李白愛喝酒，身上總是攜帶一個酒壺，每遇見一位朋友，他就會將酒壺裡的酒加倍，然後與朋友飲去 8 升的酒，已知今日李白遇見五位朋友，根據這樣的飲酒規則，若李白遇到這五位朋友都有喝到酒，則壺中應至少裝有幾升酒？

假設一開始至少裝有 x 升酒，a_n 表示遇到第 n 位朋友後剩餘的酒，

則 $a_1=2x-8$，$a_2=2a_1-8=2^2x-24$，$a_3=2a_2-8=2^3x-56$，

$a_4=2a_3-8=2^4x-120$，$a_5=2a_4-8=2^5x-248$

因為李白遇到這五位朋友都有喝到酒，所以 $a_4\geq0$，即 $2^4x-120\geq0$，故$x\geq\frac{15}{2}$#