課本P89-組合

台灣彩券共有威力彩、大樂透、大福彩、今彩539等模式供彩迷下注。請問哪一個類型中獎機會最高？

威力彩：選號分為兩區，從第**1**個選號區中的**01~38**的號碼中任選**6**個號碼，並從第**2**個選號區中的**01~08**的號碼中任選**1**個號碼進行投注。**共有22085448種選擇。**

台灣彩券共有威力彩、大樂透、今彩539等模式供彩迷下注。請問哪一個類型中獎機會最高？

大樂透：從 01~49 中任選 6 個號碼進行投注。**共有13983816種選擇。**

台灣彩券共有威力彩、大樂透、今彩539等模式供彩迷下注。請問哪一個類型中獎機會最高？

大樂透：從 01~49 中任選 6 個號碼進行投注。**共有13983816種選擇。**

今彩539：從 01~39 中任選 5 個號碼進行投注。**共有575757種選擇。**

台灣彩券共有威力彩、大樂透、今彩539等模式供彩迷下注。請問哪一個類型中獎機會最高？

像這種只選取號碼而不管排列，這種選取稱為**組合**，所有組合的總數稱為**組合數**。

從 n 個不同的事物中取出 k 個為一組的組合數 C_k^n。

前鎮高中期末摸獎，從 1 年級 15 個班中選出 2 個班得獎：

不分獎項，共有 $C_2^{15} = 105$ 種得獎的組合

$$P_2^{15} = C_2^{15} \times 2!$$

前鎮高中期末摸獎，從 1 年級 15 個班中選出 2 個班得獎：

不分獎項，共有 $C_2^{15} = 105$ 種得獎的組合

前鎮高中期末摸獎，從 1 年級 15 個班中選出 2 個班得獎，頭獎為五月天演唱會門票，貳獎為董修身演唱會門票：

獎項不同，共有 $P_2^{15} = 210$ 種得獎的組合

從 n 個事物中取 k 個

排列數 $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

組合數 $C_k^n = \dfrac{P_k^n}{k!} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

$$P_k^n = C_k^n \times k!$$

從 n 個事物中取 k 個

排列數 $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

組合數 $C_k^n = \dfrac{P_k^n}{k!} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

$$P_k^n = C_k^n \times k!$$

講義P71頁例題1 (1)28 (2)28 (3)1 (4)1

例題 1 【配合課本例 1】

求下列各數：

(1) C_2^8 (2) C_6^8 (3) C_8^8 (4) C_0^8．

課本P91例題2 (1)120　(2)56

例題 2

從 10 個手球選手中選出 7 人上場比賽.

(1) 共有多少種選法？

(2) 若其中甲、乙兩人定位為守門員，必恰選一人，則共有多少種選法？

課本P91例題2 (1)120　(2)56

例題 2

從 10 個手球選手中選出 7 人上場比賽.

(1) 共有多少種選法？

(2) 若其中甲、乙兩人定位為守門員，必恰選一人，則共有多少種選法？

課本P92例題3 (1)1200　(2)1650

例題 3

由男生 10 人，女生 5 人中選出一個 5 人小組.

(1) 選出 3 名男生 2 名女生的選法共有多少種？

(2) 若規定男女生至少各有 2 人，則共有多少種選法？

練習

講義P72頁例題2 (1) 210 (2) 112

例題 2【配合課本例 2】

從 10 個排球選手中選出 6 人上場比賽．

(1) 共有多少種選法？

(2) 若其中甲乙兩人定位為舉球員，必恰選一人，則共有多少種選法？

講義P72頁例題3 (1) 1440 (2) 240

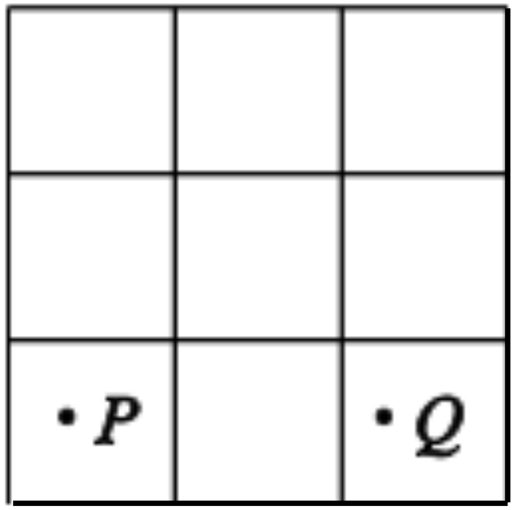
例題 3【常考題】

(1) 將 a, b, c, d, e, f, g 共七個字母排一列，求 e, f, g 完全分開的方法數．

(2) 將 a, b, c, d, e, e, e 共七個字母排一列，求三個 e 完全分開的方法數．

講義P74例題5 (1) 36

例題 5 【配合課本例 4】



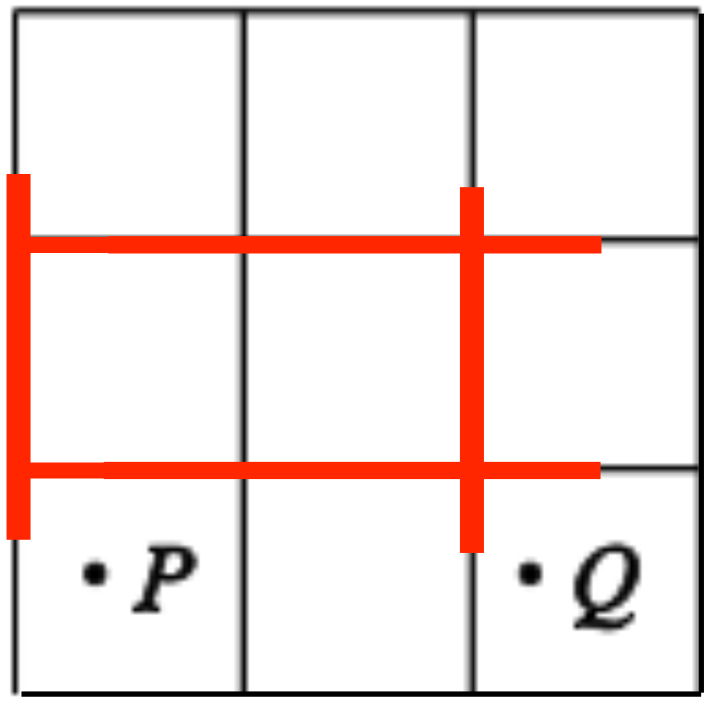
已知兩組互相垂直的平行線段，相交如右圖．

(1) 共有多少個矩形？

(2) 包含 P 點的矩形有多少個？

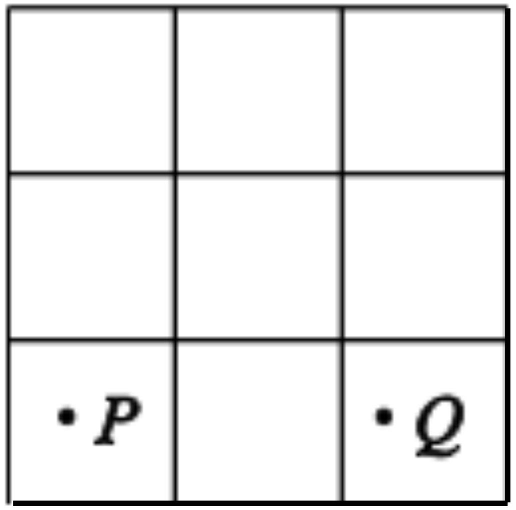
(3) 至少包含 P 或 Q 兩點之一的矩形共有多少個？

(1)



講義P74例題5 (1) 36 (2) 9

例題 5 【配合課本例 4】



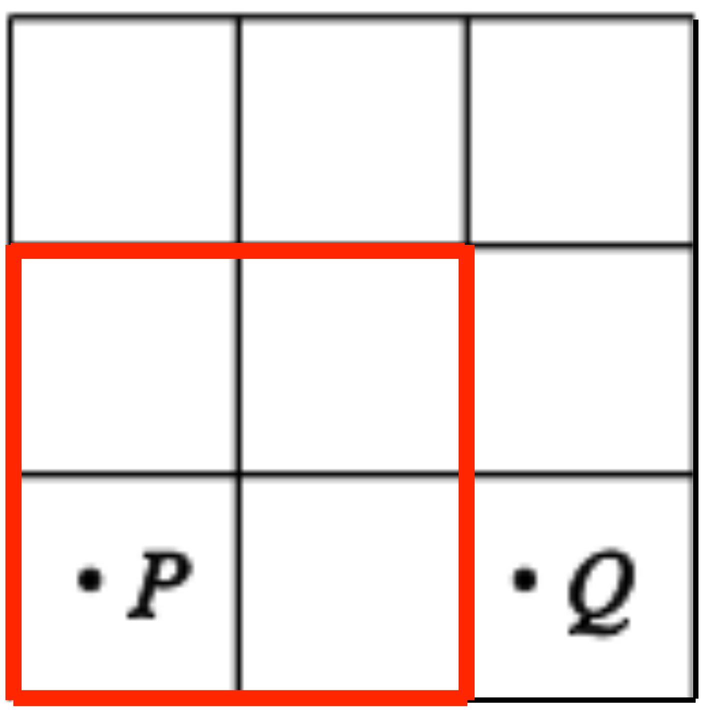
已知兩組互相垂直的平行線段，相交如右圖．

(1) 共有多少個矩形？

(2) 包含 P 點的矩形有多少個？

(3) 至少包含 P 或 Q 兩點之一的矩形共有多少個？

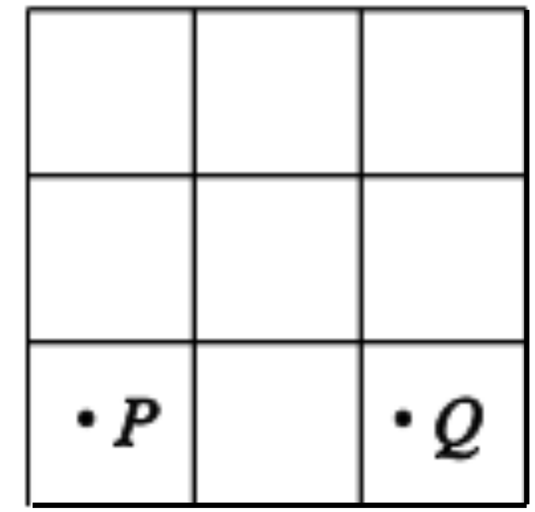
(2)



講義P74例題5 (1) 36 (2) 9 (3) 15

例題 5 【配合課本例 4】

已知兩組互相垂直的平行線段，相交如右圖．

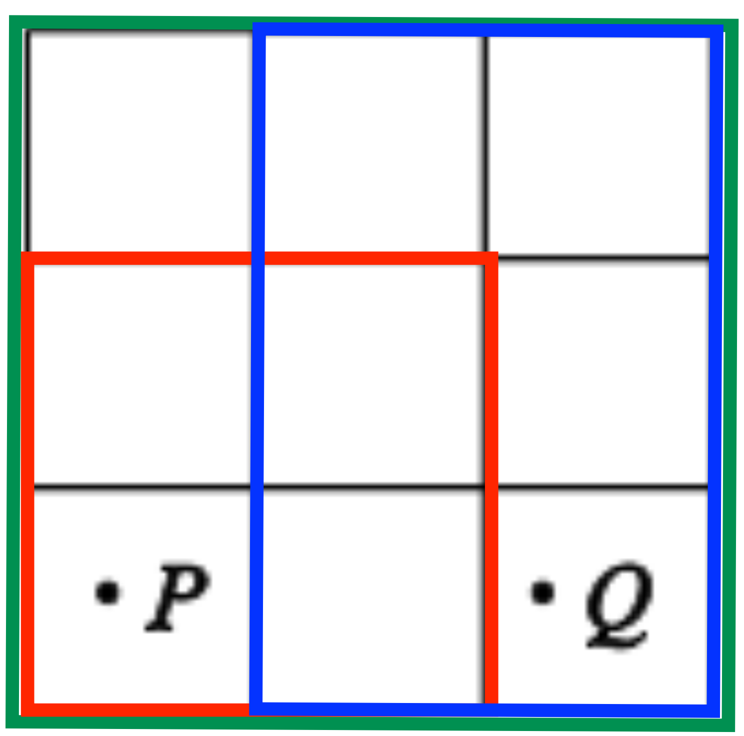


(1) 共有多少個矩形？

(2) 包含 P 點的矩形有多少個？

(3) 至少包含 P 或 Q 兩點之一的矩形共有多少個？

(3)



講義P74例題6 (1) 210 (2) 120 (3) 80

例題 6【常考題】

某公寓住戶想從 5 對夫婦中，選出 4 人組成管理委員會，求下列選法各有多少種？

(1)任意選． (2)選出的 4 人恰有一對夫婦． (3)夫婦不可同時入選．

講義P74例題6 (1) 210 (2) 120 (3) 80

例題 6【常考題】

某公寓住戶想從 5 對夫婦中，選出 4 人組成管理委員會，求下列選法各有多少種？

(1)任意選． (2)選出的 4 人恰有一對夫婦． (3)夫婦不可同時入選．

講義P75例題7 (1) 26 (2) 354

例題 7【常考題】

從「internet」一字共 8 個字母中，求

(1) 任取 4 個字母為一組，共有多少種組合？

(2) 任取 4 個字母排成一列，共有多少種排列數？

課本P93例題5

例題 5

證明下列兩個組合數的性質：

(1) 當 $0 \leq k \leq n$ 時，$C^n_k = C^n_{n-k}$。

(2) 當 $1 \leq k \leq n-1$ 時，$C^n_k = C^{n-1}_k + C^{n-1}_{k-1}$。

(1) 從 n 人中選取 k 人為一組

必也留下 $n-k$ 人未被選取

課本P93例題5

例題 5

證明下列兩個組合數的性質：

(1) 當 $0 \leq k \leq n$ 時，$C_k^n = C_{n-k}^n$．

(2) 當 $1 \leq k \leq n-1$ 時，$C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1}$．

(2) C_k^n 為自 n 人選取 k 人為一組的組合數

假設甲為此 n 人中的一人

可分為：**甲未被選中 或 甲有被選中**

C_k^{n-1}　　　　C_{k-1}^{n-1}

練習

講義P76頁例題8 (1) 1 or 3 (2) 1140

例題 8 【配合課本例 5】

(1)已知 $C_{2k}^{10}=C_{k+1}^{10}$，求 k 的值．

(2)求 $C_2^2+C_2^3+C_2^4+\cdots+C_2^{19}$ 的值．

練習

講義P76頁例題8 (1) 1 or 3　(2) 1140

例題 8【配合課本例 5】

(1)已知 $C^{10}_{2k}=C^{10}_{k+1}$，求 k 的值．

(2)求 $C^2_2+C^3_2+C^4_2+\cdots+C^{19}_2$ 的值．

講義P77頁例題9　$n=14$，$r=5$

例題 9【常考題】

設 n, r 為正整數，且 $n-1>r$，若 $C^{n-1}_r : C^n_r : C^{n+1}_r=6:9:13$，求 n, r 的值．

$Q1$：從籃球、排球及足球三種球中選取7個球，有多少種可能的選法？(每種球的個數均至少有 7 個)

籃球、排球及足球分別取出 x_1、x_2、x_3個

則：(1) $x_1 + x_2 + x_3 = 7$

(2) x_1、x_2、x_3為**非負整數**

$Q2$：將 7 個相同的白球全部分給甲、乙、丙三人，有多少種分法?

甲、乙、丙分別獲得 x_1、x_2、x_3個白球

則：(1) $x_1 + x_2 + x_3 = 7$

(2) x_1、x_2、x_3為**非負整數**

以下答案皆相同

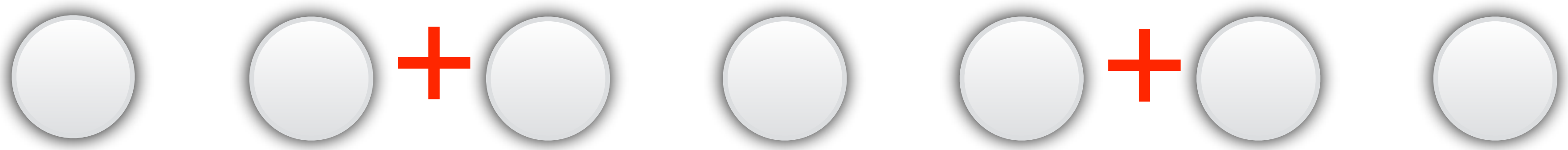
$Q1$：從籃球、排球及足球三種球中選取7個球，有多少種可能的選法？(每種球的個數均至少有 7 個)

$Q2$：將 7 個相同的白球全部分給甲、乙、丙三人，有多少種分法?

$Q3$：$x_1 + x_2 + x_3 = 7$有多少組非負整數解?

重複組合

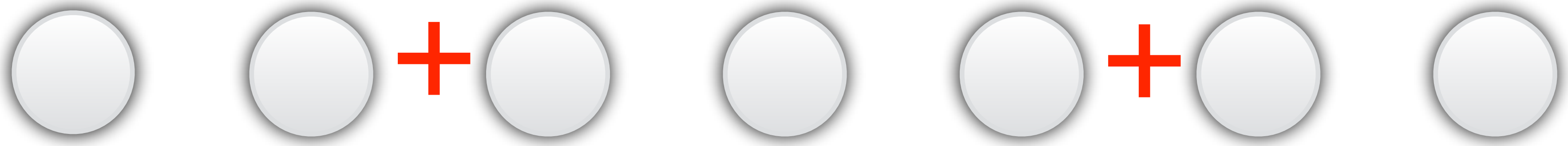
$Q3$：$x_1 + x_2 + x_3 = 7$有多少組非負整數解?



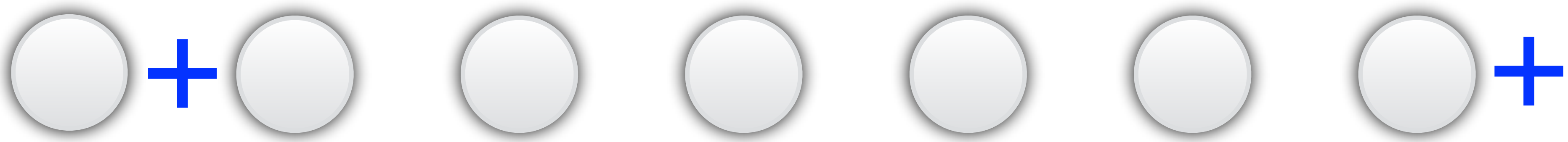
即(x_1, x_2, x_3)=(2,3,2)

重複組合

$Q3$：$x_1 + x_2 + x_3 = 7$有多少組非負整數解?



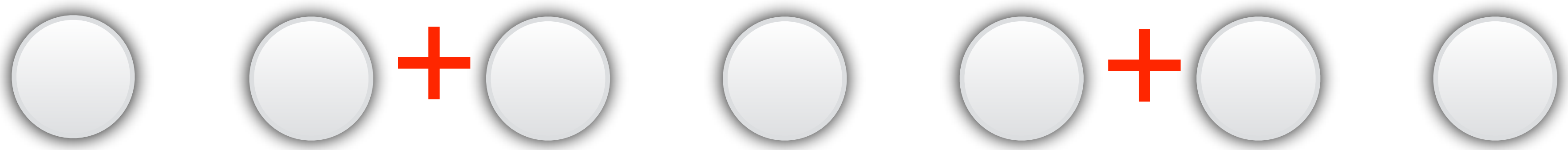
即(x_1, x_2, x_3)=(2,3,2)



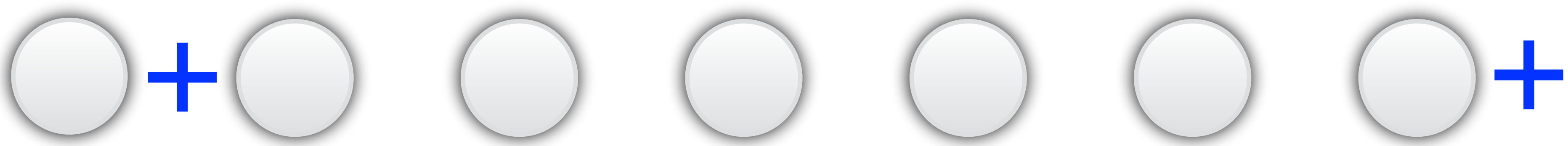
即(x_1, x_2, x_3)=(1,6,0)

重複組合

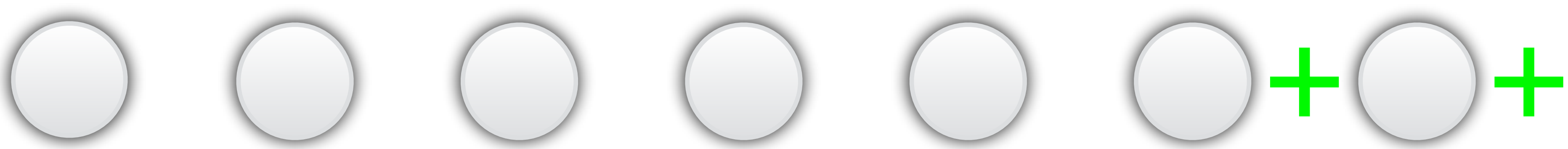
$Q3$：$x_1 + x_2 + x_3 = 7$有多少組非負整數解?



即$(x_1, x_2, x_3)=(2,3,2)$



即$(x_1, x_2, x_3)=(1,6,0)$



即$(x_1, x_2, x_3)=(6,1,0)$

重複組合

$Q3$：$x_1 + x_2 + x_3 = 7$有多少組非負整數解?

「$x_1 + x_2 + x_3 = 7$的非負整數解組數」

一一對應

「**7 個相同物** 和 **2 個分隔記號**的排列」

重複組合

$Q3$：$x_1 + x_2 + x_3 = 7$有多少組非負整數解？

「$x_1 + x_2 + x_3 = 7$的非負整數解組數」

一一對應

「**7 個相同物** 和 **2 個分隔記號**的排列」

共有 $\dfrac{(7+2)!}{7! \times 2!}$ **=36組**

重複組合

rep

重複組合

下列三個問題的組合數都是 C_k^{n+k-1}.

(1) 從 n 類事物中選取 k 個的組合（每類的個數均至少 k 個且可以重複選取）.

(2) n 元一次方程式 $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$ 的非負整數解.

(3) 將 k 個相同的事物全部分給 n 個人的分法.

重複組合

rep

重複組合

下列三個問題的組合數都是 C_k^{n+k-1}.

(1) 從 n 類事物中選取 k 個的組合（每類的個數均至少 k 個且可以重複選取）.

(2) n 元一次方程式 $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$ 的非負整數解.

(3) 將 k 個相同的事物全部分給 n 個人的分法.

$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=k$ 的非負整數解組數

k 個相同物 和 n-1 個分隔記號的排列

共有 $\dfrac{(k+n-1)!}{k!\times(n-1)!}$ 組合數

講義P78例題10 28

例題 10【配合課本例 6】

方程式 $x_1+x_2+x_3=6$ 有多少組非負整數解？

講義P78例題10 28

例題 10【配合課本例 6】

方程式 $x_1+x_2+x_3=6$ 有多少組非負整數解？

講義P79例題12 (1) 120 (2) 20

例題 12【配合課本例 8】

將 7 枝相同的筆全部分給 4 個小朋友．

(1) 共有幾種分法？

(2) 若要求每人至少分到 1 枝，則有多少種分法？

講義P81例題14 (1) 1001 (2) 210

例題 14 【常考題】

設 $x+y+z+u\leq 10$，問

(1)非負整數解有多少組？ (2)正整數解有多少組？

練習

講義P79頁例題11 45

例題 11 【配合課本例 7】

桌球俱樂部擬購買 8 把桌球拍以供忘記攜帶球拍的會員使用，若球拍分為刀板，直拍與大陸拍 3 類，試問俱樂部有多少種購買方式？

練習

講義P79頁例題11 45

例題 11 【配合課本例 7】

桌球俱樂部擬購買 8 把桌球拍以供忘記攜帶球拍的會員使用，若球拍分為刀板，直拍與大陸拍 3 類，試問俱樂部有多少種購買方式？

講義P80頁例題13 (1) 455 (2) 165 (3) 84 (4) 10

例題 13 【常考題】

已知方程式 $x+y+z+u=12$，問

(1) 非負整數解有多少組？

(2) 正整數解有多少組？

(3) 滿足 $x\geq 0,\ y\geq 1,\ z\geq 2,\ u\geq 3$ 的整數解有多少組？

(4) 滿足 $x>0,\ y>1,\ z>2,\ u>3$ 的整數解有多少組？

練習

講義P81頁例題15 (1) 20 (2) 28

例題 15 【配合課本例 9】

將 4 本相同的書及 5 枝相同的筆全部分給甲乙兩人，則下列分法各有多少種？

(1)每人至少得一枝筆．

(2)每人至少得一物（書或筆皆可）．

練習

講義P81頁例題15 (1) 20 (2) 28

例題 15 【配合課本例 9】

將 4 本相同的書及 5 枝相同的筆全部分給甲乙兩人，則下列分法各有多少種？

(1)每人至少得一枝筆． (2)每人至少得一物（書或筆皆可）．

補充 60組

方程式 $xyz=72$ 的正整數解有多少組？

課本P99頁例題9 54

例題 9

辯論社的 3 個男生與 2 個女生組隊參加奧瑞岡三人制辯論比賽．今欲從這 5 人中，選出 3 人分別擔任一辯、二辯與三辯．試問出賽名單中既有男生又有女生的安排共有多少種？

課本P99頁例題9 54

例題 9

辯論社的 3 個男生與 2 個女生組隊參加奧瑞岡三人制辯論比賽．今欲從這 5 人中，選出 3 人分別擔任一辯、二辯與三辯．試問出賽名單中既有男生又有女生的安排共有多少種？

課本P100頁例題10 (1) 1680 (2) 280

例題 10

將 9 本$\boxed{\text{不同}}$的書依下列情形分配，方法各有多少種？

(1) 分給甲、乙、丙三人，每人各得 3 本．

(2) 分裝入三個相同的袋子，每袋裝 3 本．

(3) 分裝入三個相同的袋子，其中一袋裝 5 本，另兩袋各裝 2 本．

(3) 378

練習

講義P83頁例題16

例題 16【配合課本例 10】

將 6 本不同的書，求下列各分法的方法數：

(1)平分成三堆．

(2)依 2 本，2 本，1 本，1 本分成四堆．

(3)依 4 本，1 本，1 本分成三堆．

(4)甲得 4 本，乙得 1 本，丙得 1 本．

(1) 15　(2) 45　(3) 15　(4) 30

練習

講義P83頁例題17　210

例題 17【常考題】

籃球 3 人鬥牛賽，共有 9 人參加，組成三隊，求其中甲乙兩人不在同一隊的組隊方法有多少種．

The End