課本P1-
直角三角形的邊角關係

課本～前言

早在古埃及時代，人們就已將簡單的三角學知識應用在實際的測量問題上，例如：建築金字塔、重新計算河水泛濫後的耕地面積、通商航海和觀測天象等。現在，三角學的研究範圍已不僅限於三角形，它不但是數理分析的基礎，更是研究實用科學所必需的工具。

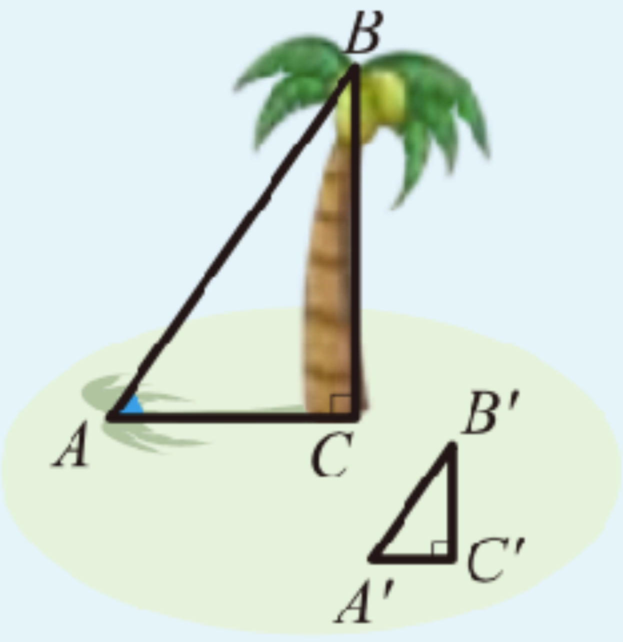
課本P2例題1

例題 1

如圖所示，$\triangle ABC$ 相似於 $\triangle A'B'C'$．單槓高度 $\overline{B'C'}$ 為 2 公尺，柱影長 $\overline{A'C'}$ 為 1.6公尺，

(1) 求 $\dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}}$ 的比值．

(2) 若量得樹影長 $\overline{AC}=12$ 公尺，則樹高 $\overline{BC}$ 為何？



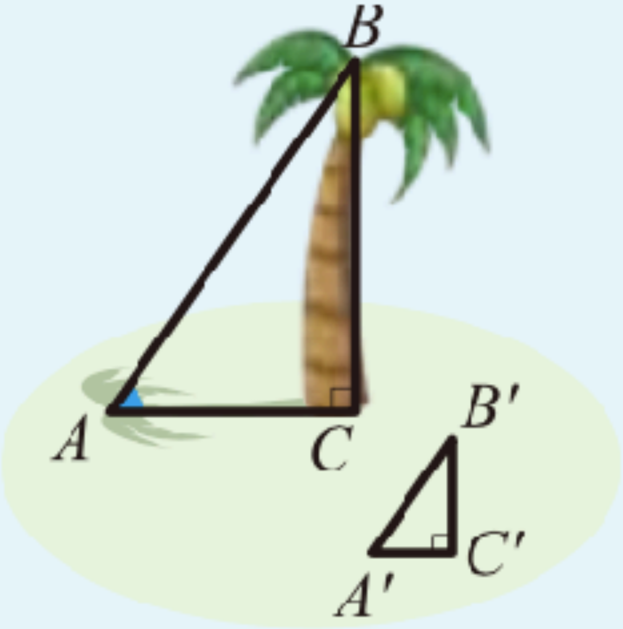
課本P2例題1

例題 1

如圖所示，$\triangle ABC$ 相似於 $\triangle A'B'C'$．單槓高度 $\overline{B'C'}$ 為 2 公尺，柱影長 $\overline{A'C'}$ 為 1.6公尺，

(1) 求 $\dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}}$ 的比值．

(2) 若量得樹影長 $\overline{AC}=12$ 公尺，則樹高 $\overline{BC}$ 為何？



$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}}=\frac{2}{1.6}=\frac{5}{4}$$

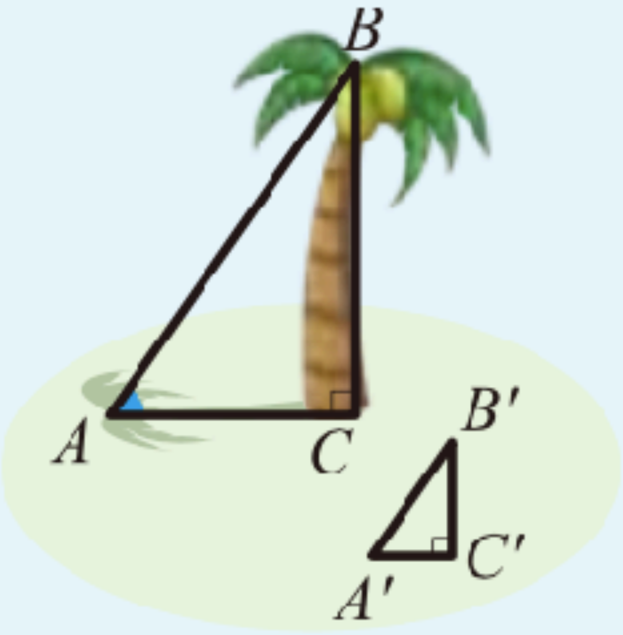
課本P2例題1

例題 1

如圖所示，$\triangle ABC$ 相似於 $\triangle A'B'C'$．單槓高度 $\overline{B'C'}$ 為 2 公尺，柱影長 $\overline{A'C'}$ 為 1.6公尺，

(1) 求 $\dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}}$ 的比值．

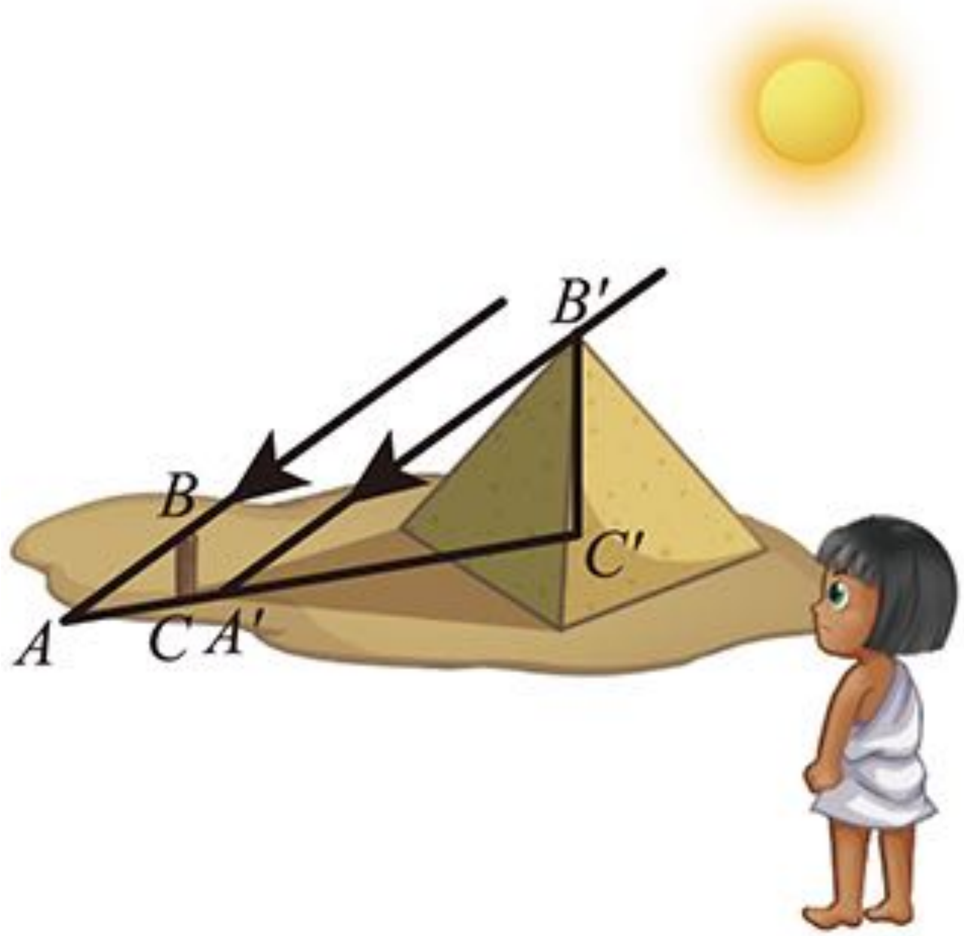
(2) 若量得樹影長 $\overline{AC}=12$ 公尺，則樹高 $\overline{BC}$ 為何？

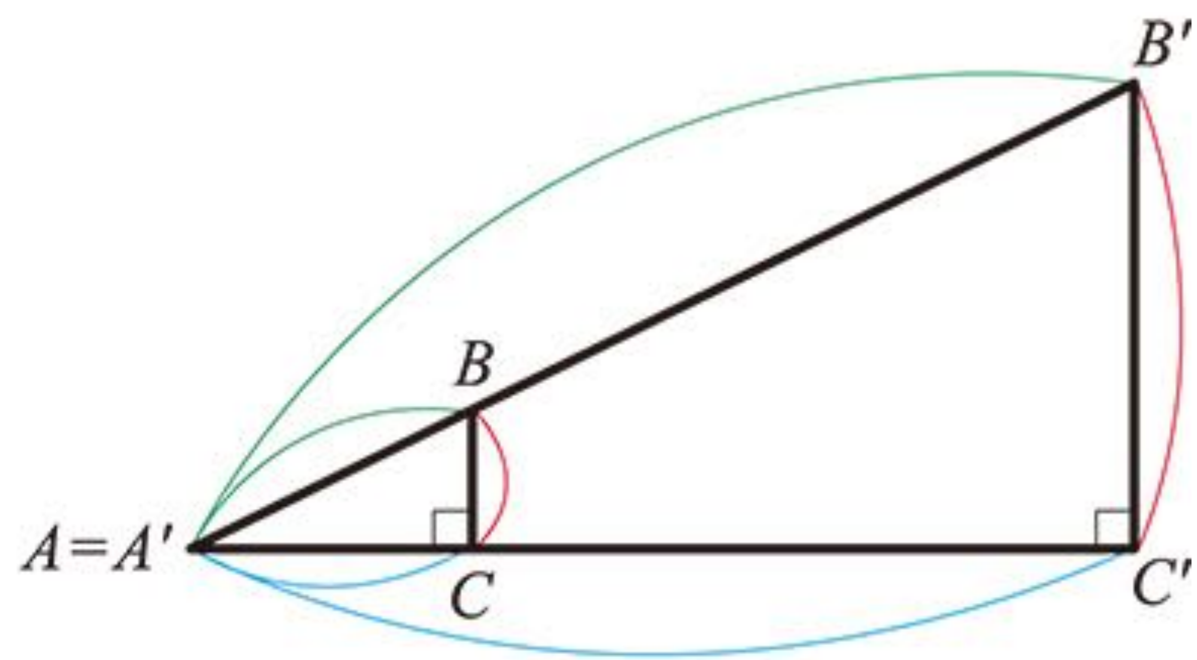


因為 $\triangle ABC$ 相似於 $\triangle A'B'C'$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}}\Rightarrow\frac{\overline{BC}}{12}=\frac{5}{4}\Rightarrow\overline{BC}=15$$

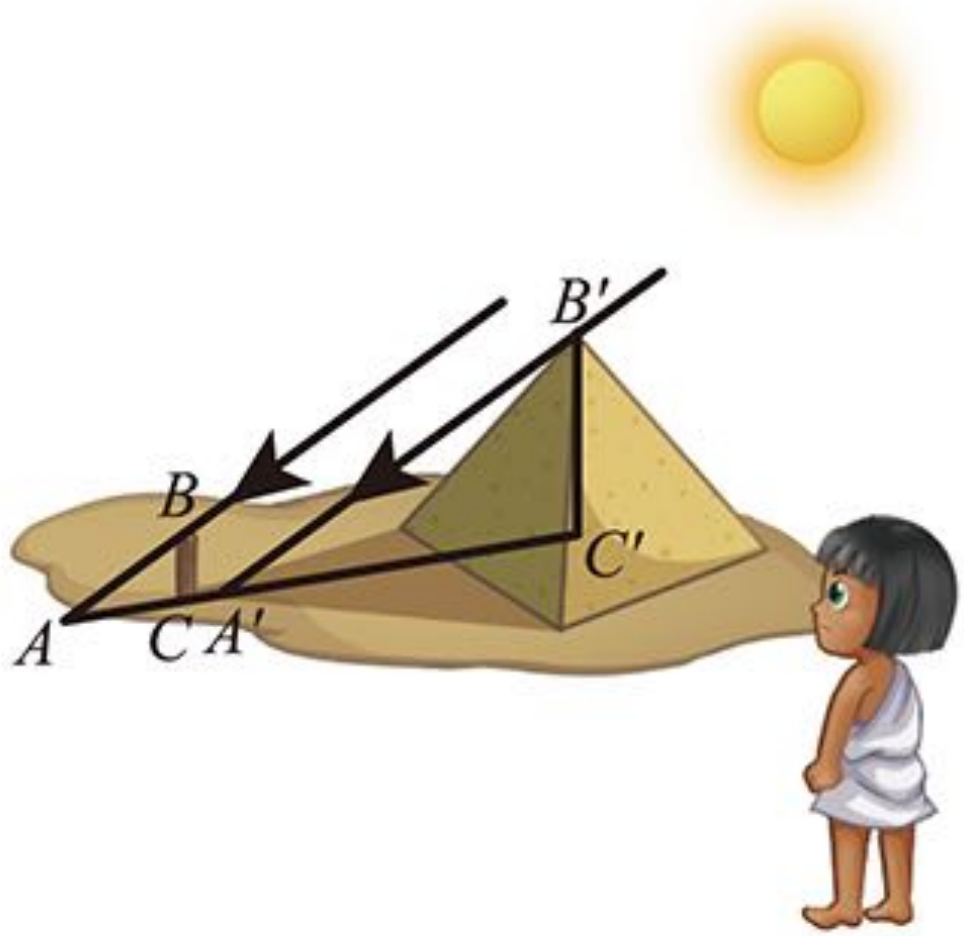
古希臘時代的泰利斯(Thales, 624~547B.C.)
就是用類似的概念來測量金字塔的高度。

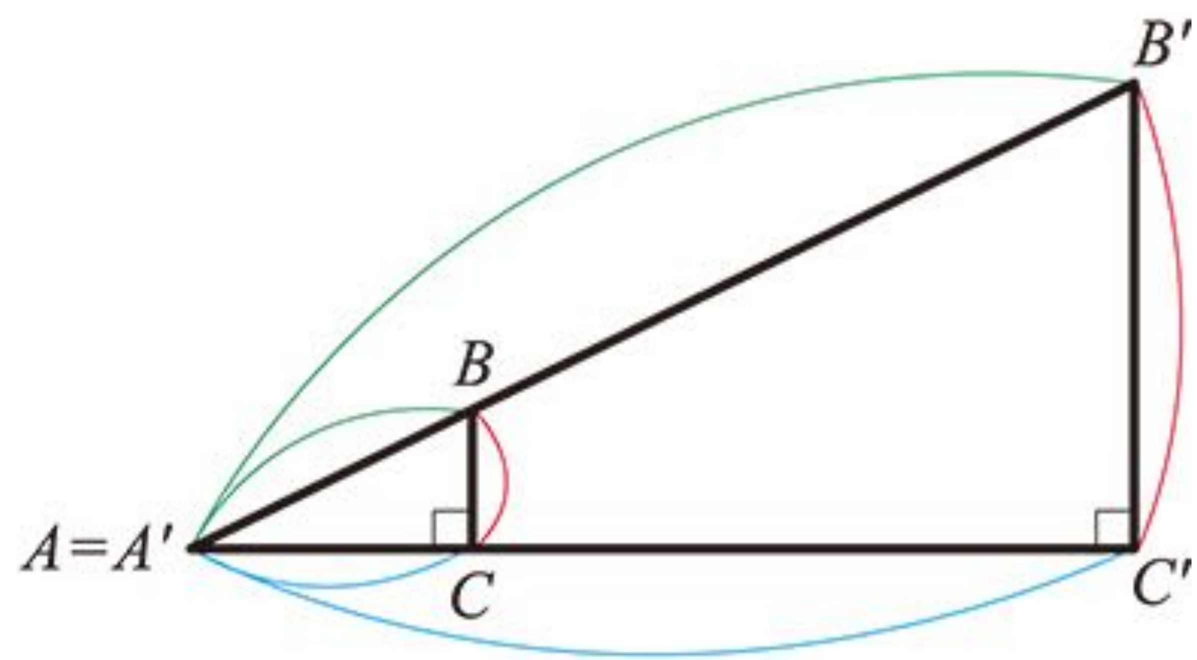




$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}}$$

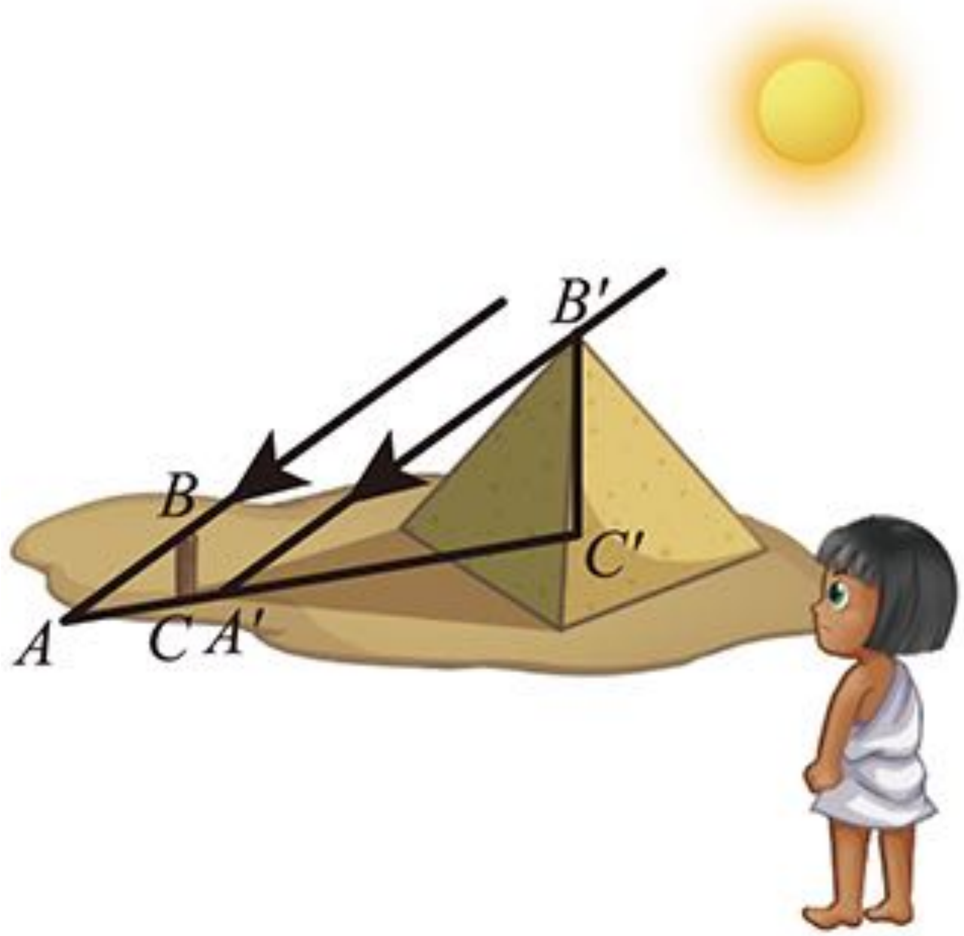
古希臘時代的泰利斯(Thales, 624~547B.C.)就是用類似的概念來測量金字塔的高度。

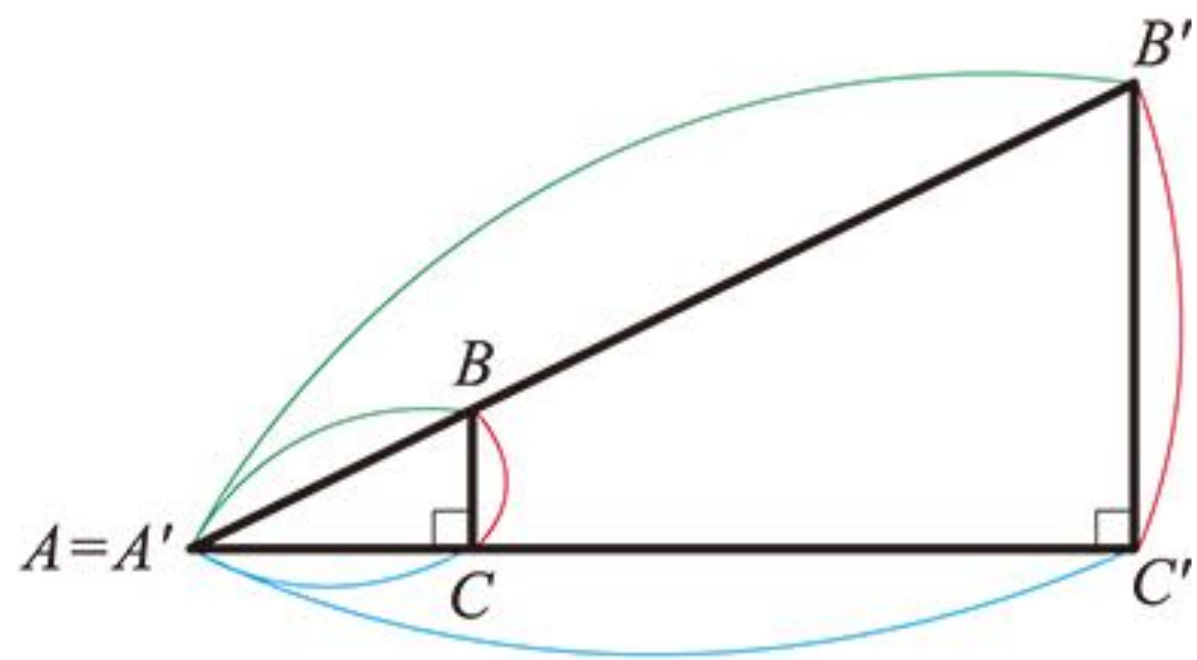




$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$$

古希臘時代的泰利斯(Thales, 624~547B.C.)就是用類似的概念來測量金字塔的高度。





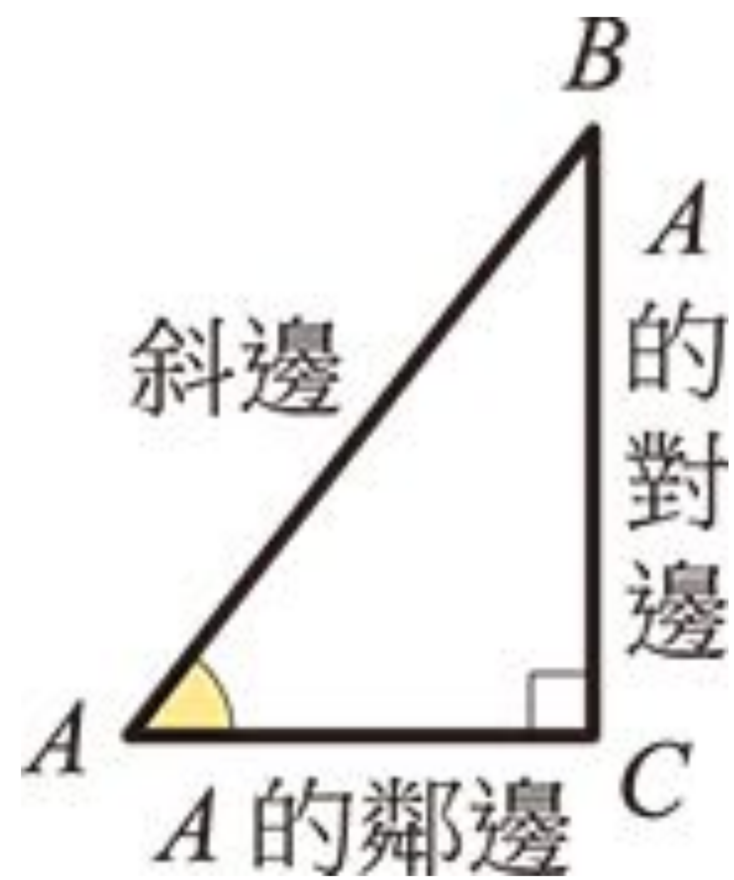
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}}$$

盡管三角知識起源很早，但用線段的比來定義三角函數，是尤拉在《無窮小分析引論》一書中首次給出。現今三角函數常用的有六個（高中課綱介紹三個），但歷史上還曾出現四個，甚至十個以上。

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的對邊}}{\text{斜邊}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$，稱作 $\angle A$ 的**正弦函數**.

$$\cos A=\frac{\angle A\text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$，稱作 $\angle A$ 的**餘弦函數**.

$$\tan A=\frac{\angle A\text{ 的對邊}}{\angle A\text{ 的鄰邊}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$，稱作 $\angle A$ 的**正切函數**.

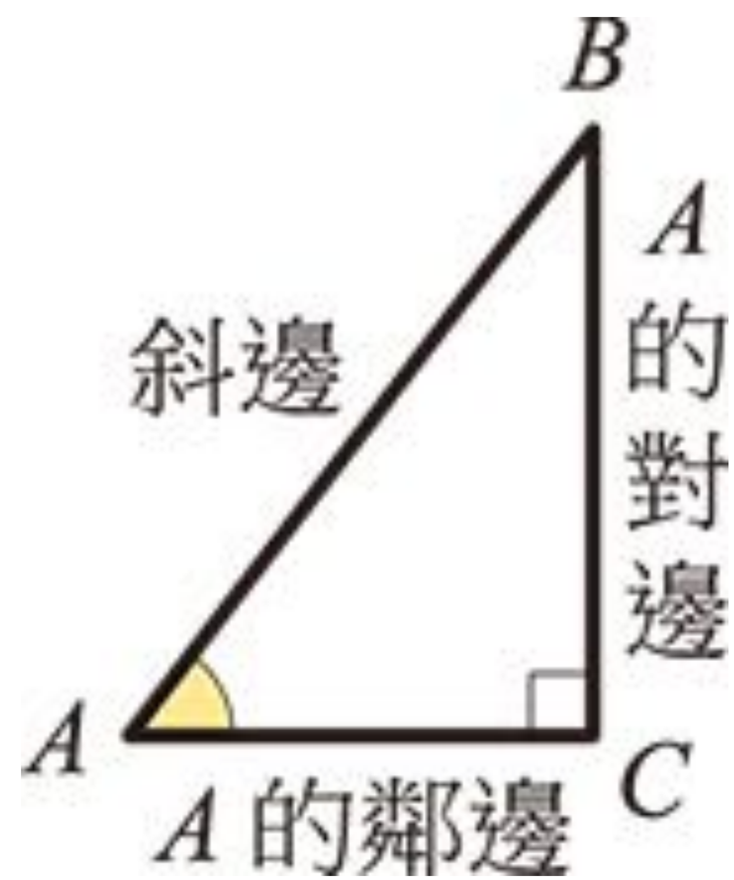


$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的對邊}}{\text{斜邊}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$，稱作 $\angle A$ 的**正弦函數**.

$$\cos A=\frac{\angle A\text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$，稱作 $\angle A$ 的**餘弦函數**.

$$\tan A=\frac{\angle A\text{ 的對邊}}{\angle A\text{ 的鄰邊}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$，稱作 $\angle A$ 的**正切函數**.

$$\overline{AB}=l \qquad \frac{\overline{BC}}{l}=sinA$$



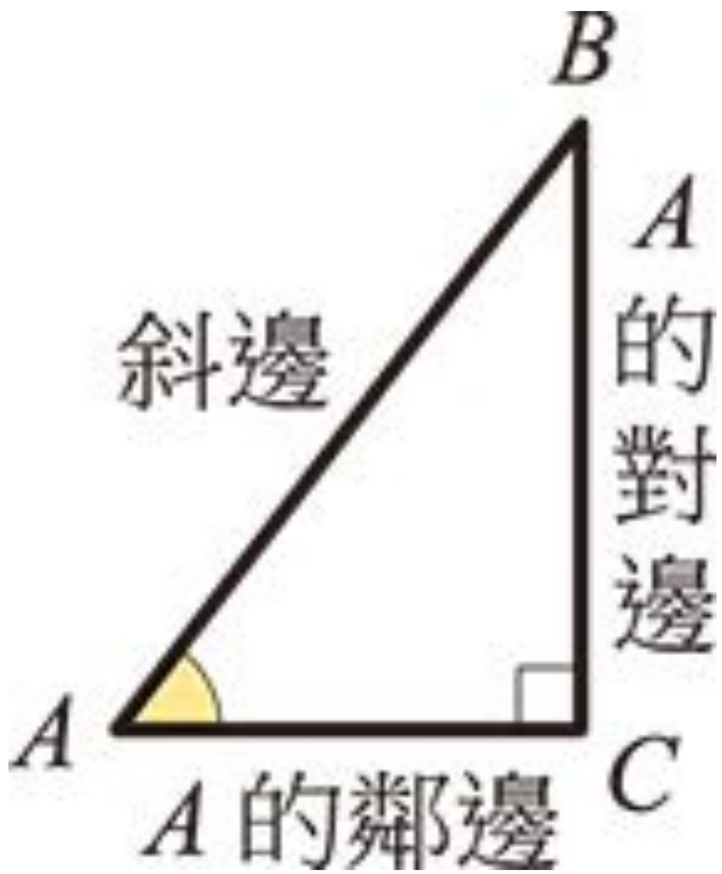
$$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$，稱作 $\angle A$ 的**正弦函數**.

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$，稱作 $\angle A$ 的**餘弦函數**.

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\angle A \text{ 的鄰邊}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$，稱作 $\angle A$ 的**正切函數**.

$$\overline{AB} = l \quad \frac{\overline{BC}}{l} = sinA$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = l \cdot sinA$$

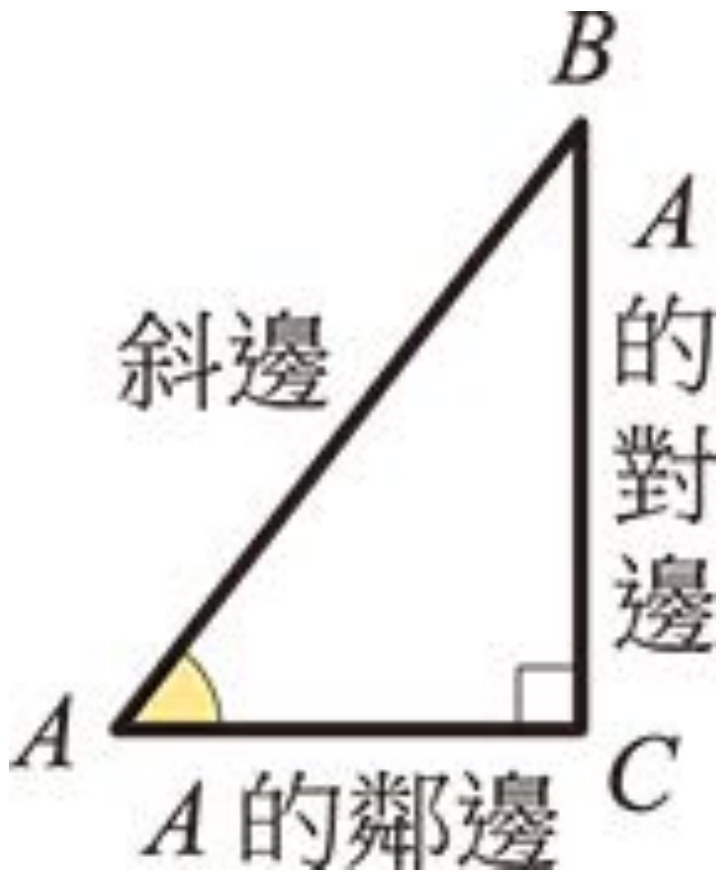


$$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$，稱作 $\angle A$ 的**正弦函數**.

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$，稱作 $\angle A$ 的**餘弦函數**.

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\angle A \text{ 的鄰邊}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$，稱作 $\angle A$ 的**正切函數**.

$$\overline{AB} = l \qquad \frac{\overline{AC}}{l} = cosA$$



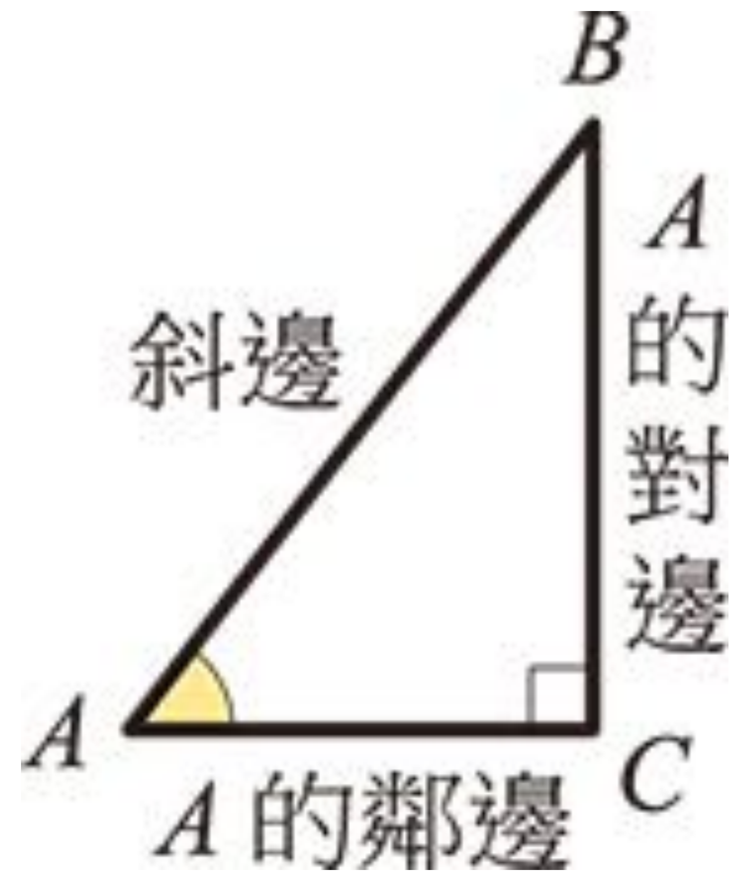
$\sin A = \dfrac{\angle A\text{ 的對邊}}{\text{斜邊}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$，稱作 $\angle A$ 的**正弦函數**.

$\cos A = \dfrac{\angle A\text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$，稱作 $\angle A$ 的**餘弦函數**.

$\tan A = \dfrac{\angle A\text{ 的對邊}}{\angle A\text{ 的鄰邊}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$，稱作 $\angle A$ 的**正切函數**.

$$\overline{AB} = l \qquad \frac{\overline{AC}}{l} = \cos A$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = l \cdot \cos A$$

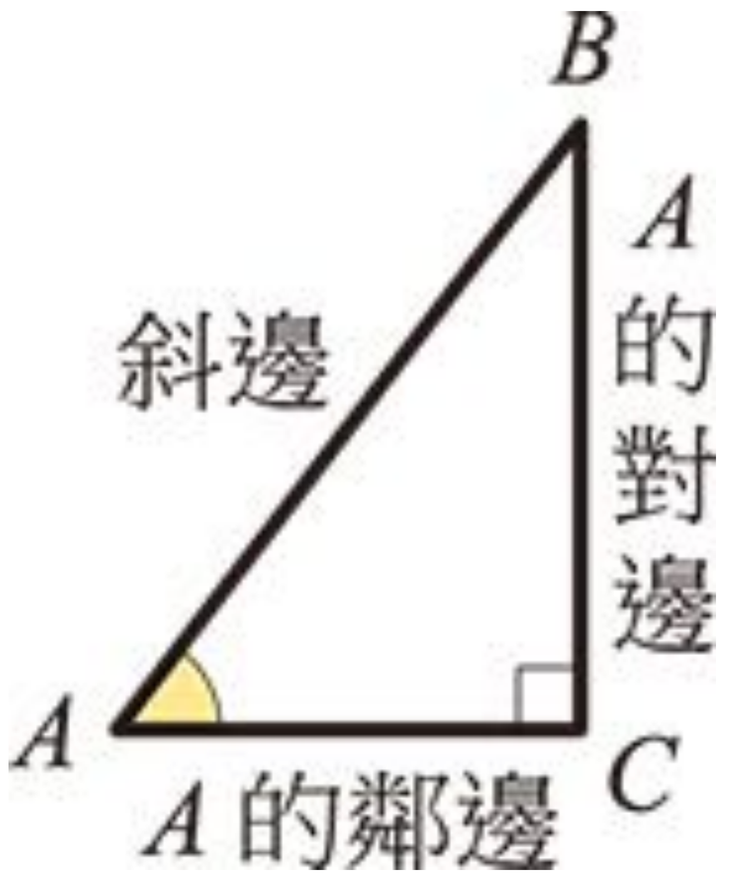


$\sin A=\dfrac{\angle A\text{ 的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$，稱作 $\angle A$ 的**正弦函數**.

$\cos A=\dfrac{\angle A\text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$，稱作 $\angle A$ 的**餘弦函數**.

$\tan A=\dfrac{\angle A\text{ 的對邊}}{\angle A\text{ 的鄰邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$，稱作 $\angle A$ 的**正切函數**.

$$\overline{AC}=l \quad \frac{\overline{BC}}{l}=tanA$$



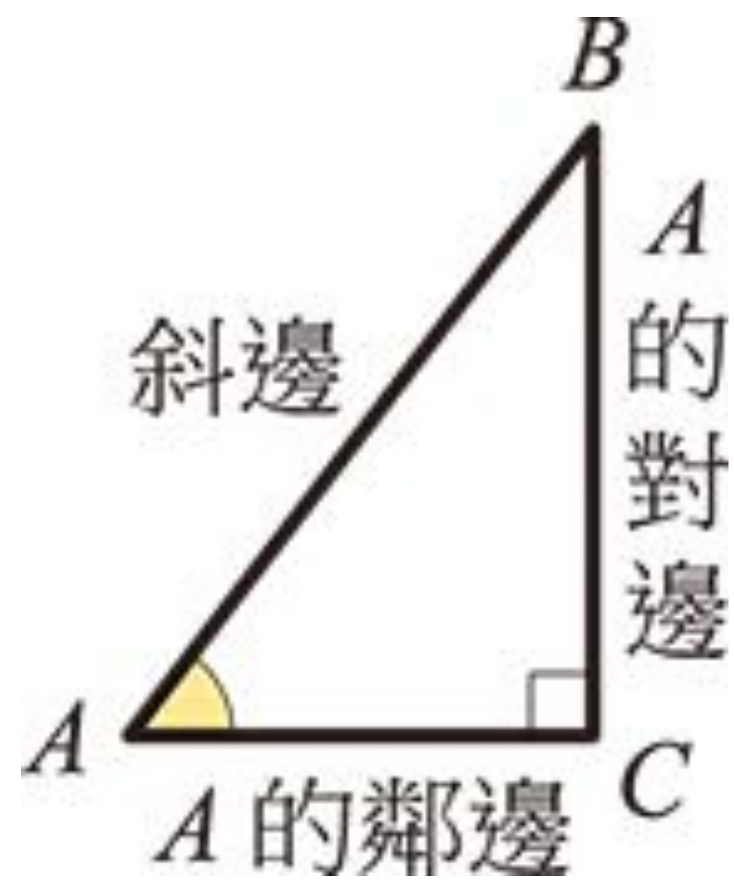
$$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$，稱作 $\angle A$ 的**正弦函數**.

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$，稱作 $\angle A$ 的**餘弦函數**.

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\angle A \text{ 的鄰邊}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$，稱作 $\angle A$ 的**正切函數**.

$$\overline{AC} = l \qquad \frac{\overline{BC}}{l} = tanA$$

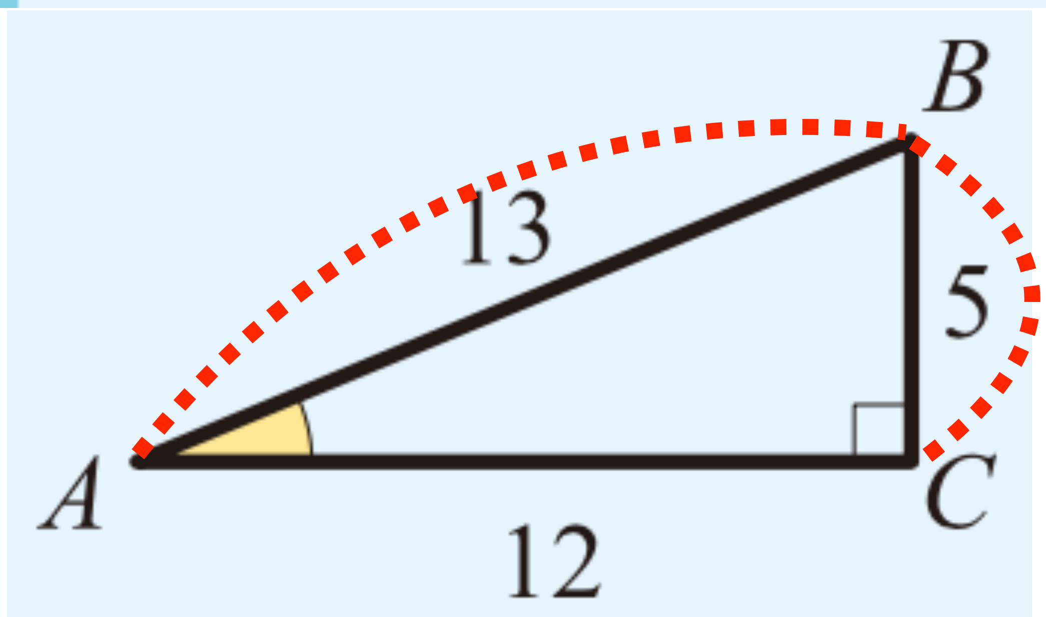
$$\Rightarrow \overline{BC} = l \cdot tanA$$



課本P4例題2

例題 2

在直角$\triangle ABC$中，已知$\overline{AB}=13$，$\overline{AC}=12$，$\overline{BC}=5$，求 $\sin A$，$\cos A$ 和 $\tan A$ 的值．

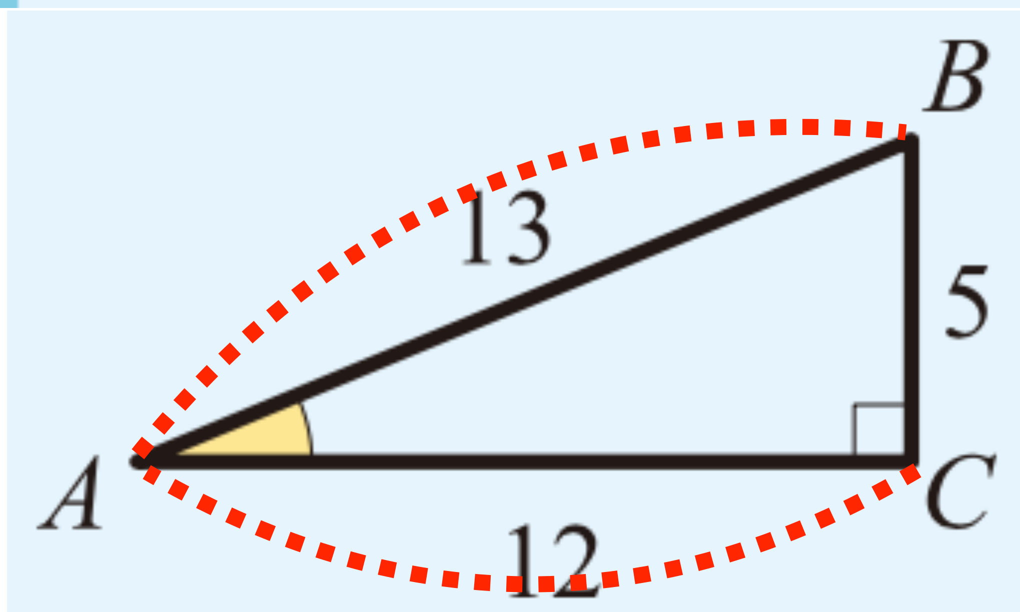


$$\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{5}{13}$$

課本P4例題2

例題 2

在直角$\triangle ABC$中，已知$\overline{AB}=13$，$\overline{AC}=12$，$\overline{BC}=5$，求 $\sin A$，$\cos A$ 和 $\tan A$ 的值.

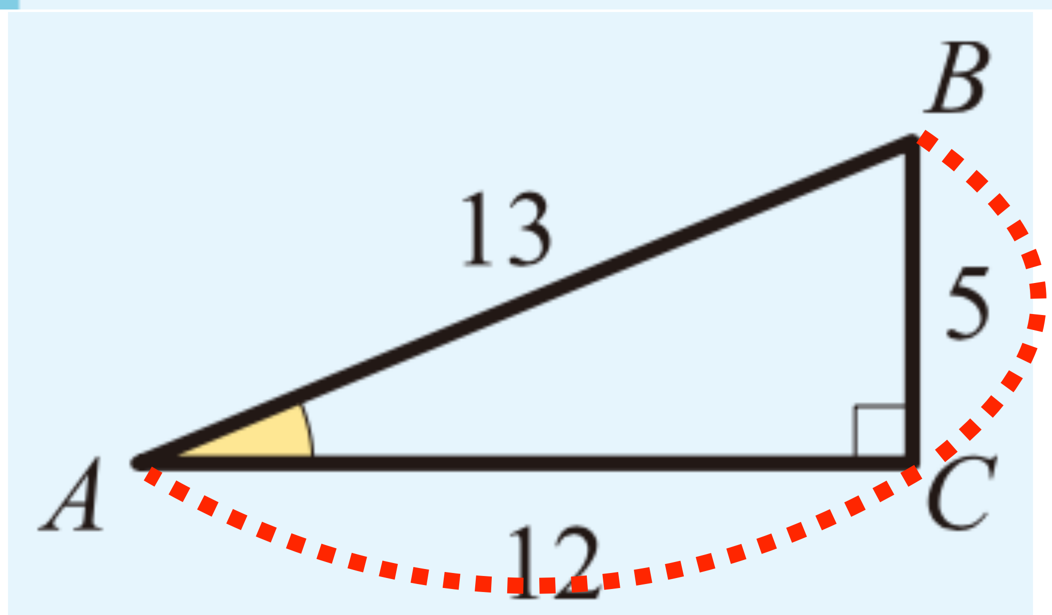


$$\cos A=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{12}{13}$$

課本P4例題2

例題 2

在直角△ABC 中，已知 $\overline{AB}=13$，$\overline{AC}=12$，$\overline{BC}=5$，求 $\sin A$，$\cos A$ 和 $\tan A$ 的值.



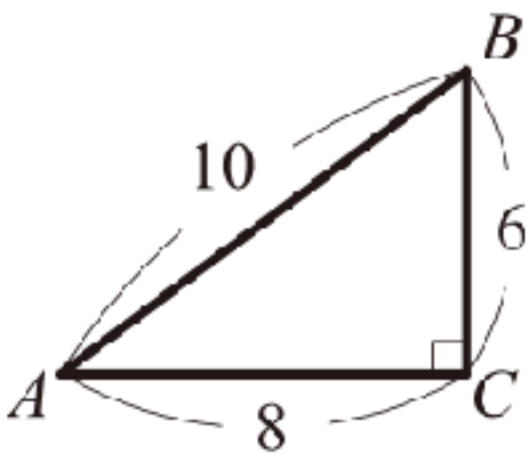
$$\tan A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{5}{12}$$

請同學練習課本P4練習題

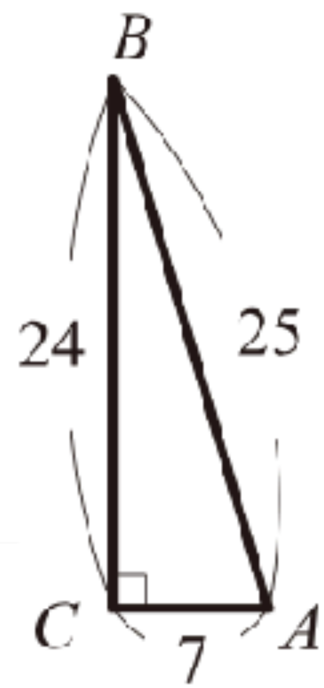
練習

求下列各三角形中 sin A，cos A，tan A 的值．

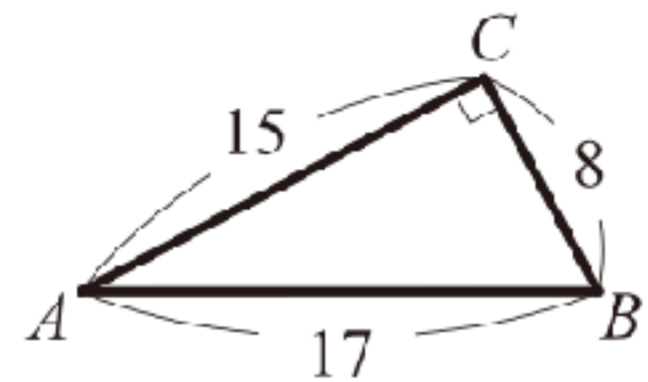
(1)



(2)



(3)

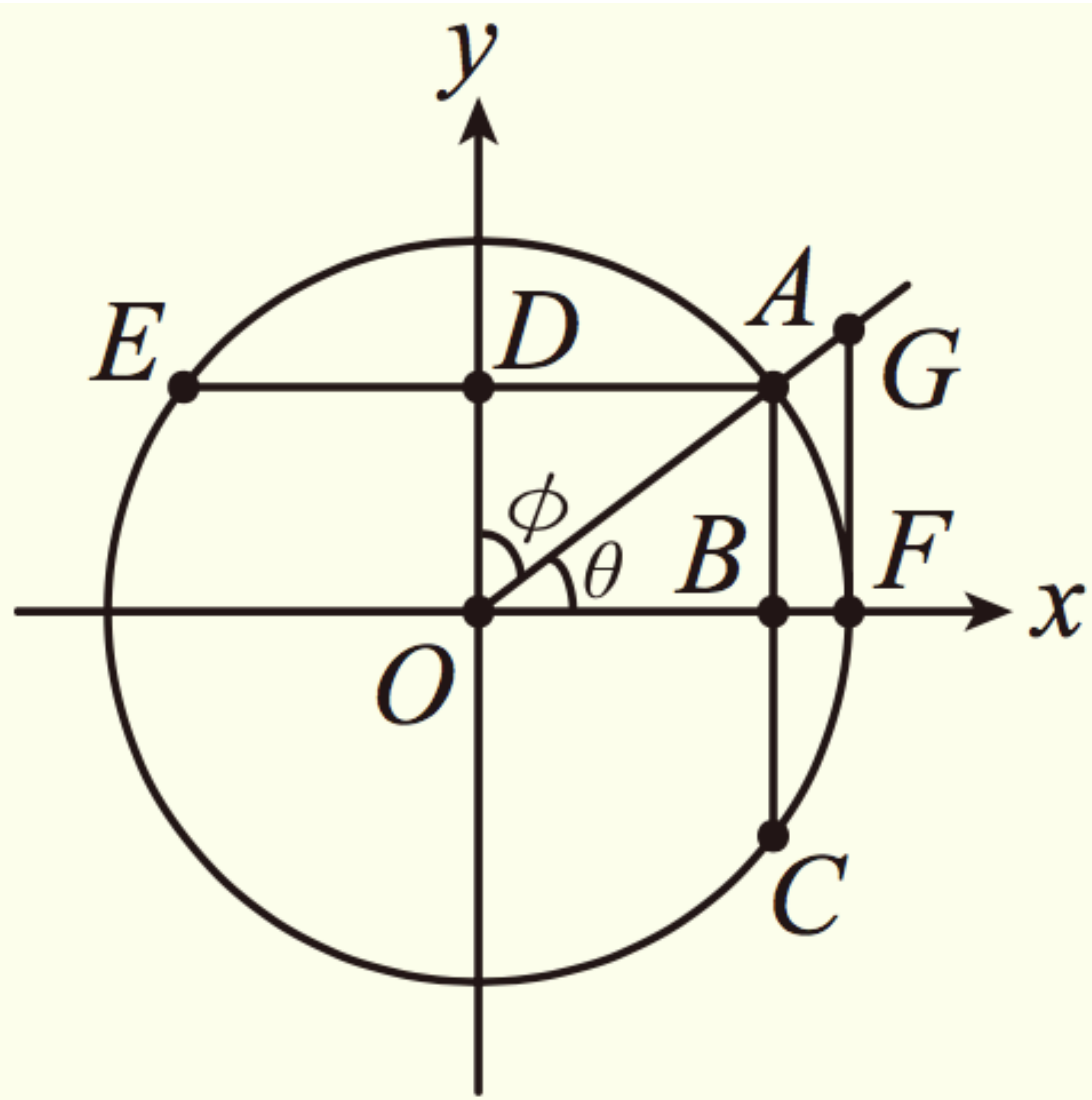


(1) $\sin A=\dfrac{3}{5}$, $\cos A=\dfrac{4}{5}$, $\tan A=\dfrac{3}{4}$.

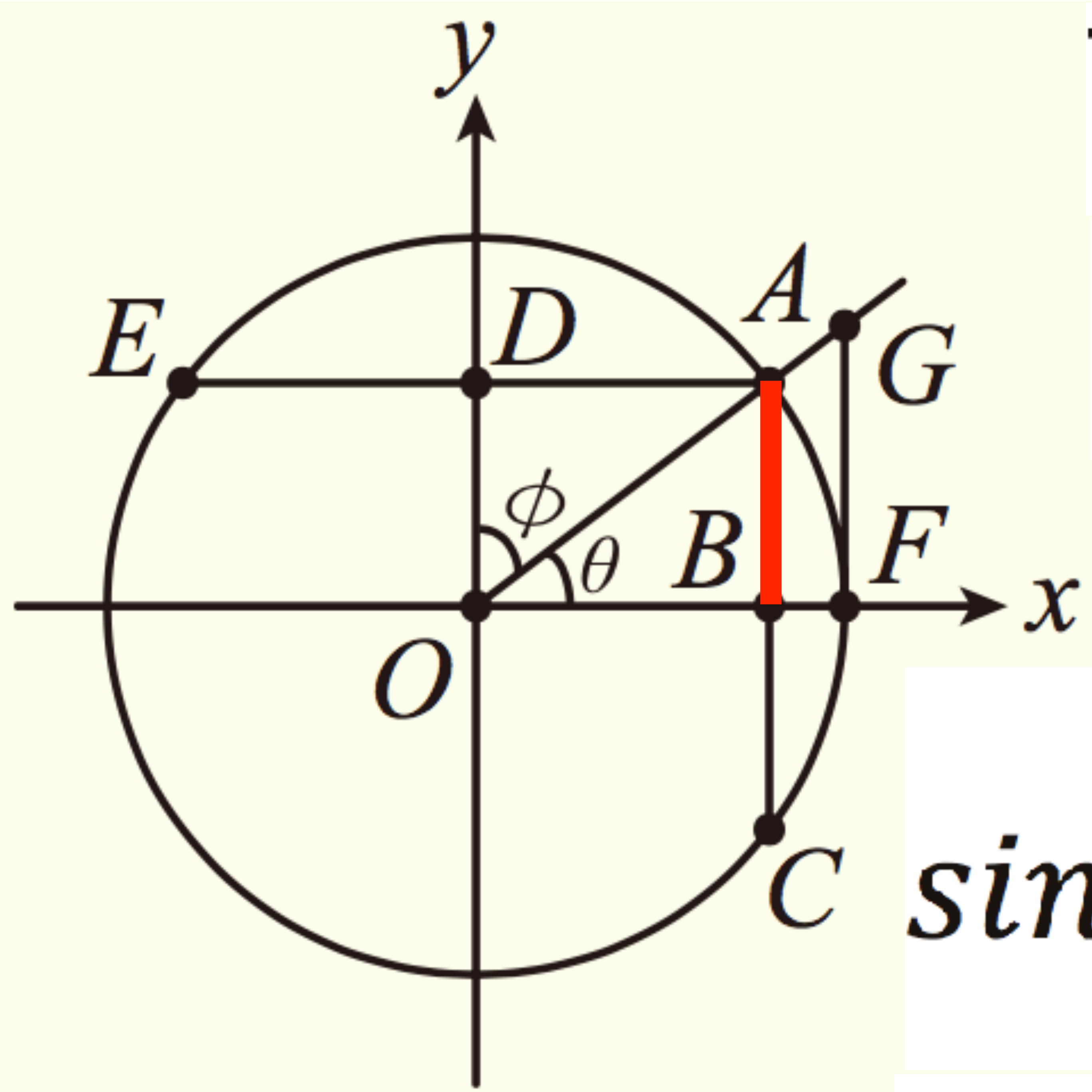
(2) $\sin A=\dfrac{24}{25}$, $\cos A=\dfrac{7}{25}$, $\tan A=\dfrac{24}{7}$.

(3) $\sin A=\dfrac{8}{17}$, $\cos A=\dfrac{15}{17}$, $\tan A=\dfrac{8}{15}$.

單位圓



單位圓



$$\overline{OA} = \overline{OF} = 1$$

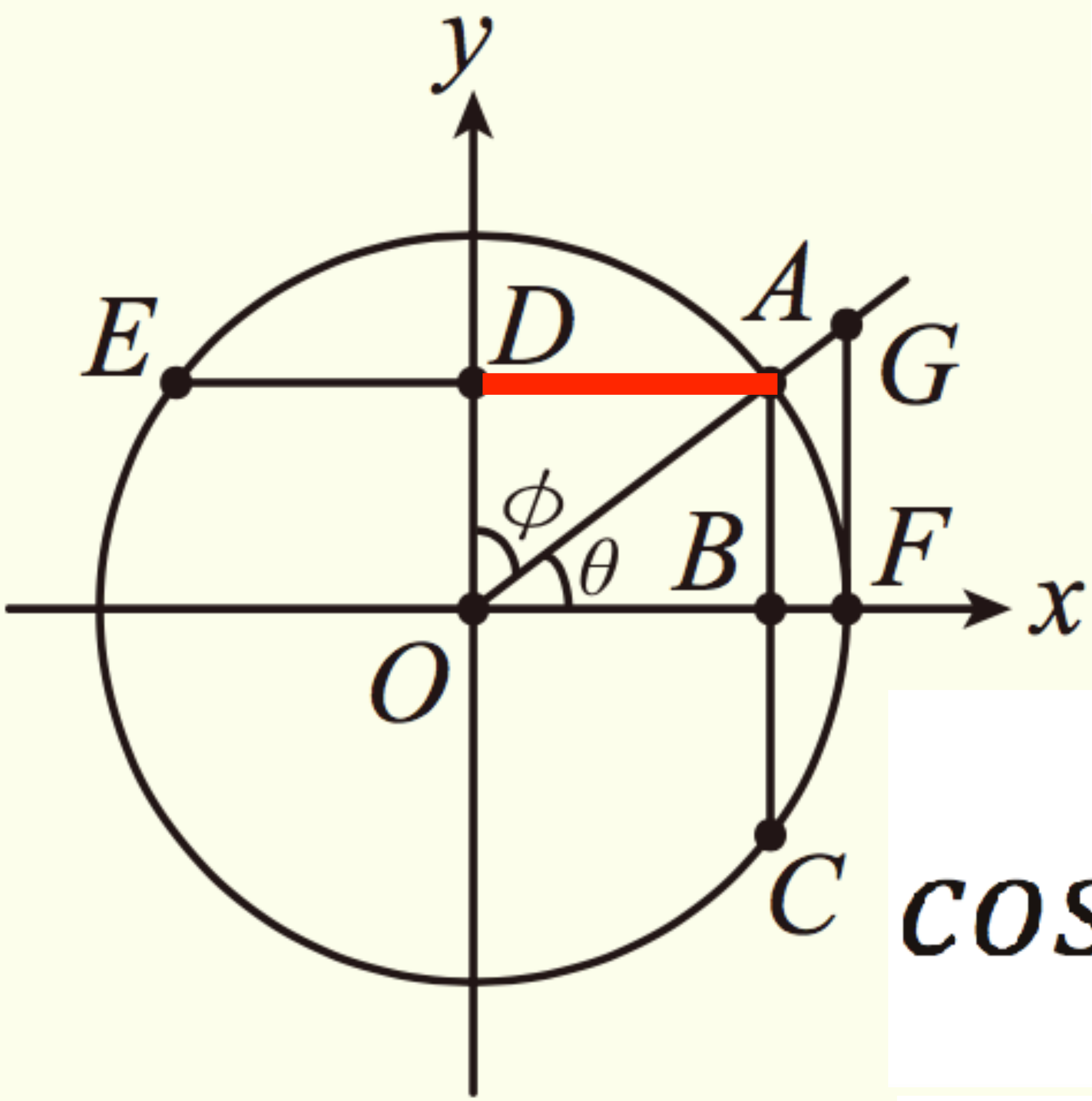
$\overline{AC} \perp x$ 軸

ΔOAB中

$$sin\theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AB}}{1}$$

$sin\theta = \overline{AB}$ 正弦

單位圓



$$\overline{OA} = \overline{OF} = 1$$

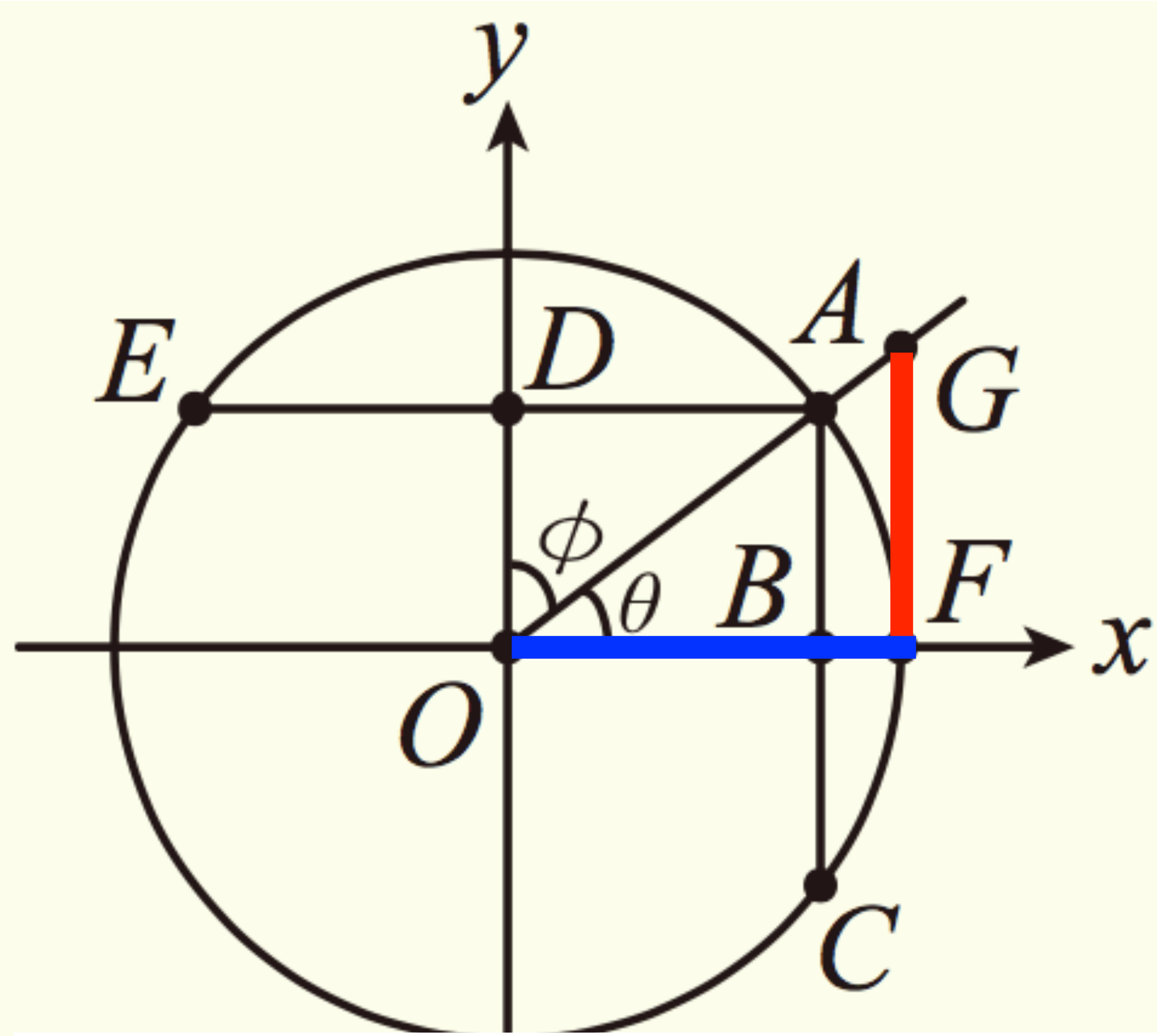
$\overline{AC} \perp x$ 軸

ΔOAB中

$$\cos\theta = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{1}$$

$\cos\theta = \overline{OB}$ 餘弦

單位圓



$\overline{OA} = \overline{OF} = 1$

$\overline{AC} \perp x$ 軸

$\overline{AB} // \overline{GF}$

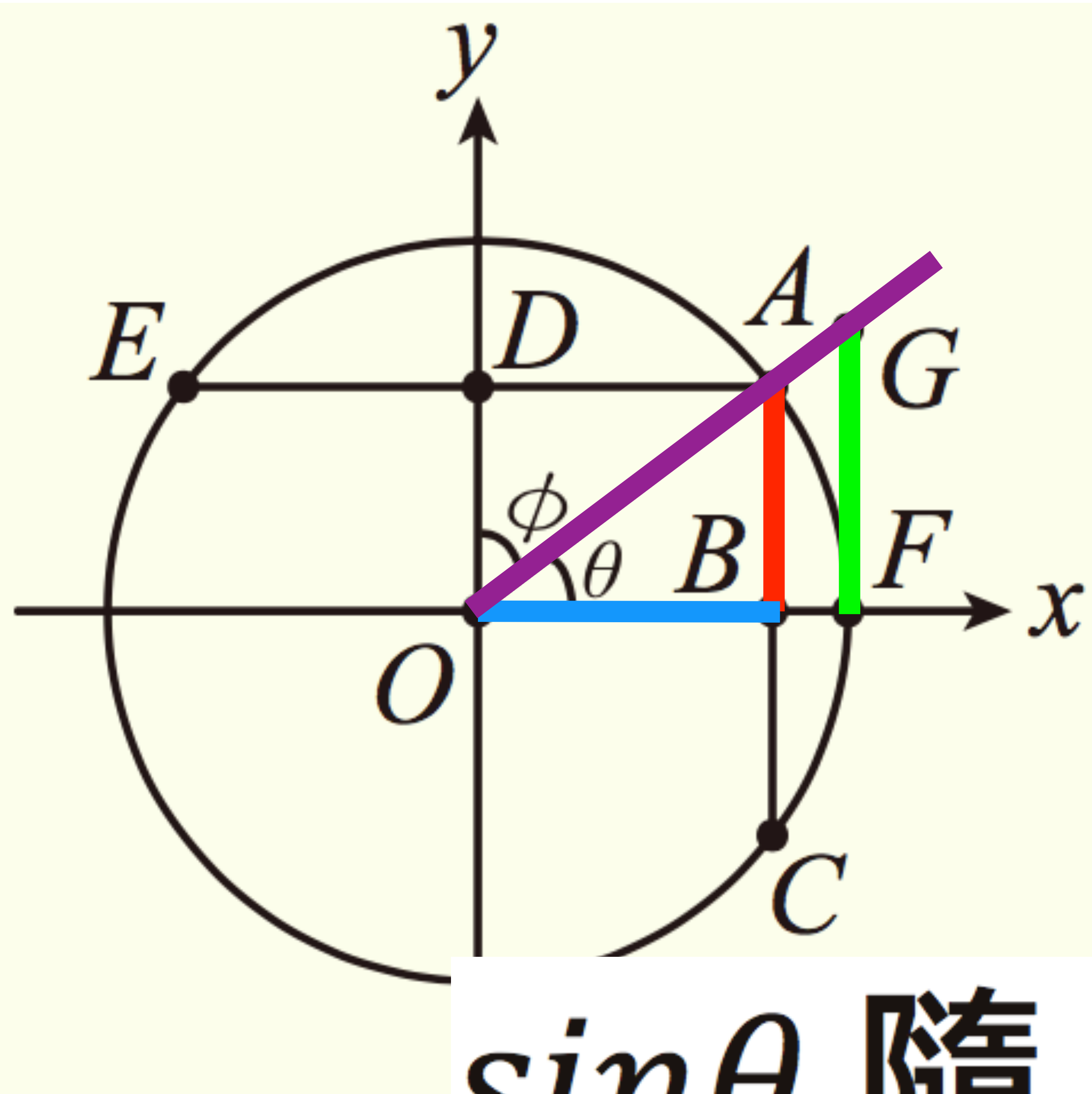
ΔOGF中

$$tan\theta = \frac{\overline{GF}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{GF}}{1}$$

$tan\theta = \overline{GF}$

正切

單位圓



$\sin\theta = \overline{AB}$ 正弦

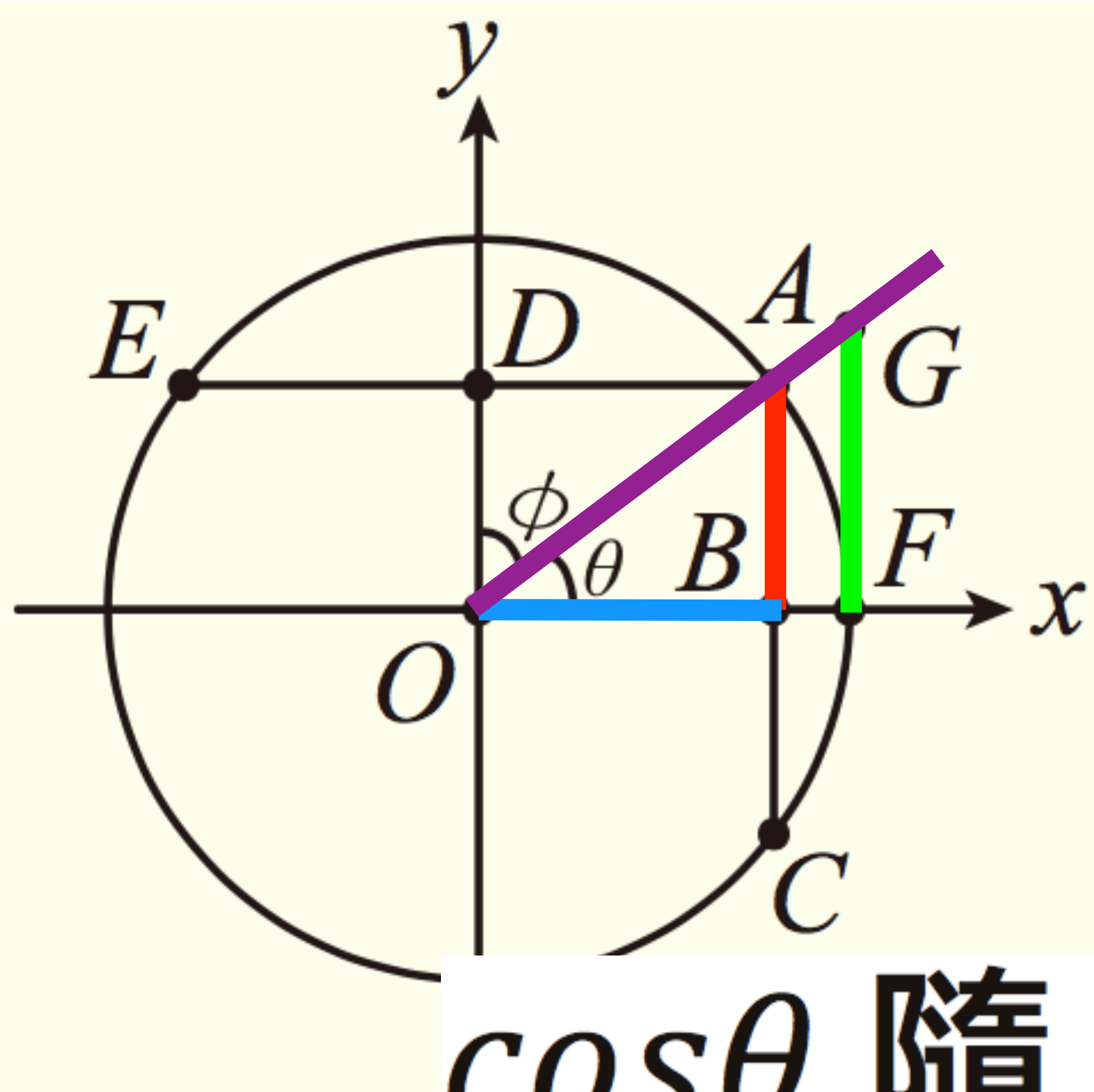
$\cos\theta = \overline{OB}$ 餘弦

$\tan\theta = \overline{GF}$ 正切

$0° < \theta < 90°$

$\sin\theta$ 隨 θ 增加而增加

單位圓



$\sin\theta = \overline{AB}$ 正弦

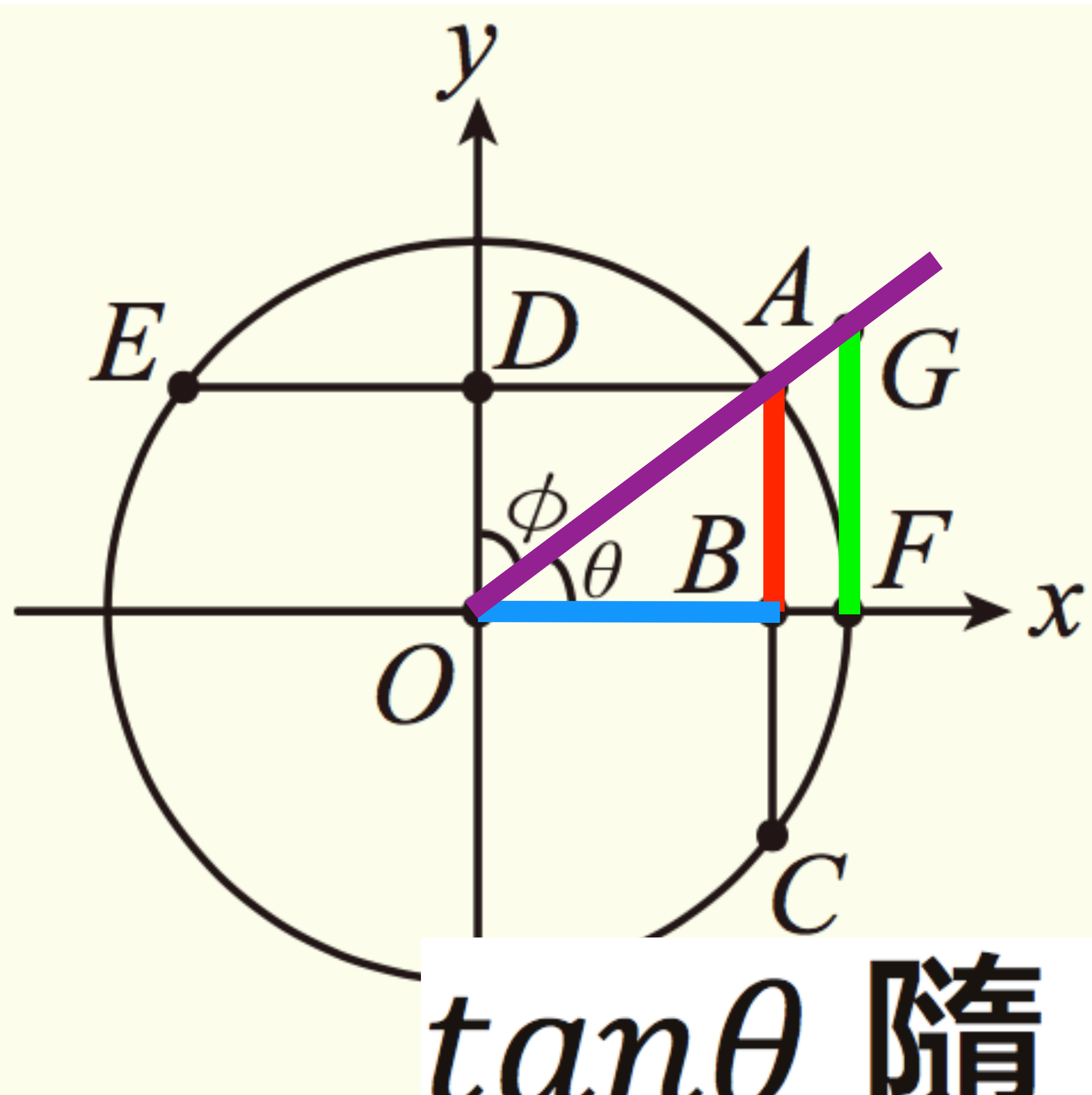
$\cos\theta = \overline{OB}$ 餘弦

$\tan\theta = \overline{GF}$ 正切

$0° < \theta < 90°$

$\cos\theta$ 隨 θ 增加而減少

單位圓



$sin\theta = \overline{AB}$ 正弦

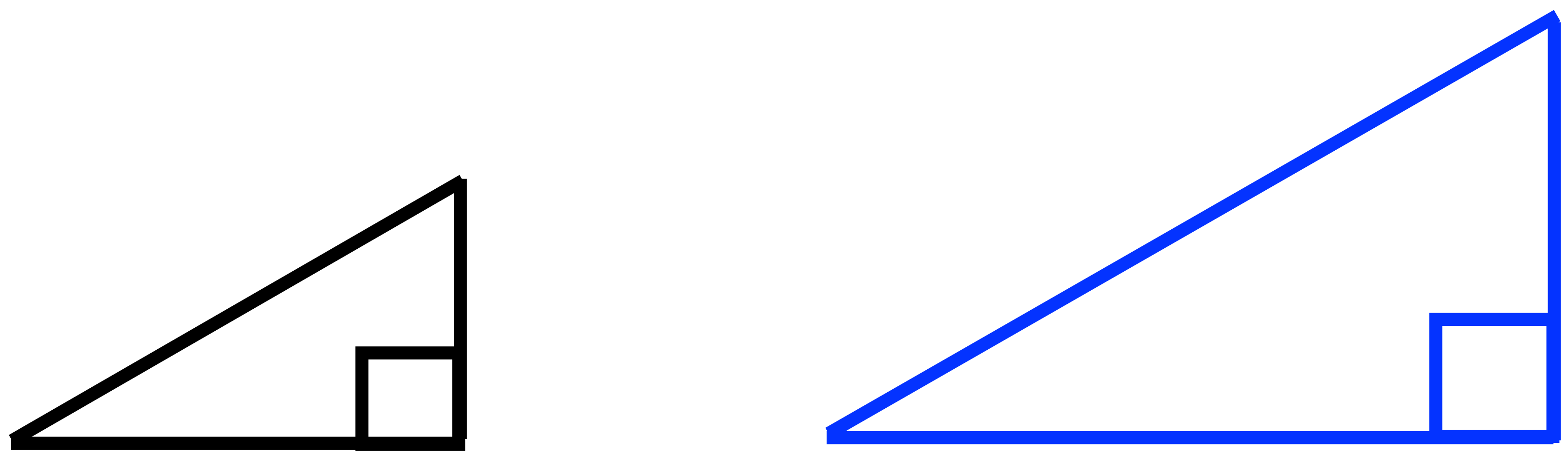
$cos\theta = \overline{OB}$ 餘弦

$tan\theta = \overline{GF}$ 正切

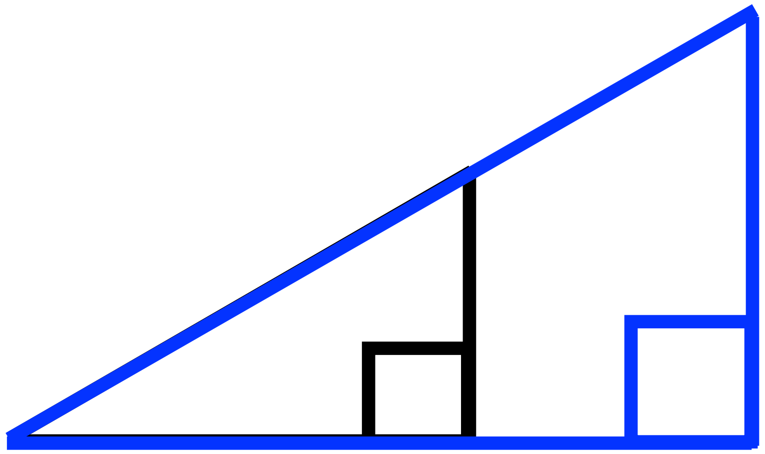
$0° < \theta < 90°$

$tan\theta$ 隨 θ 增加而增加

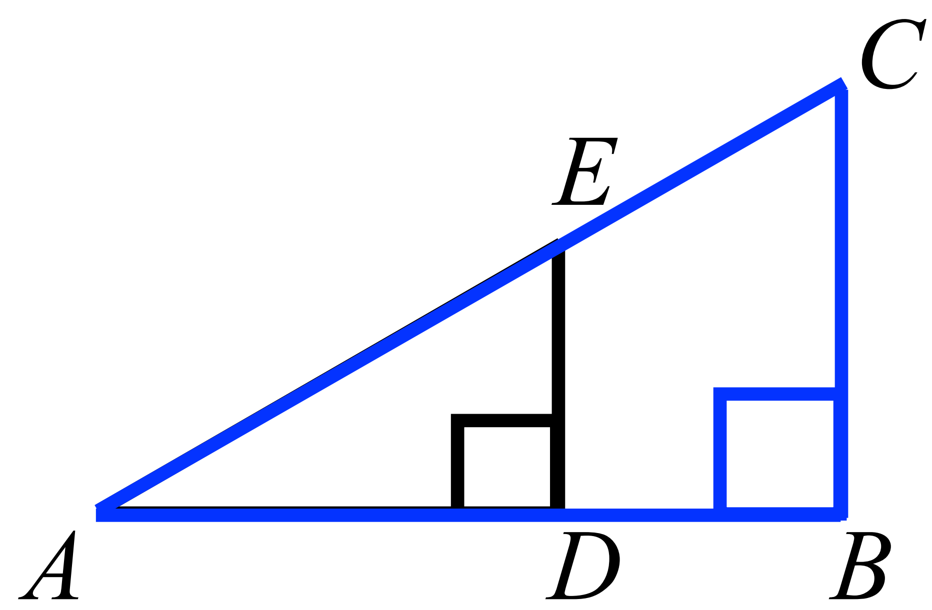
三角函數值



三角函數值



三角函數值



$$\sin A = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} \qquad \sin A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

相似 $\Rightarrow \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$

課本P5練習

	$sin\theta$	$cos\theta$	$tan\theta$
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$15°$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
$75°$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$

課本P5例題4

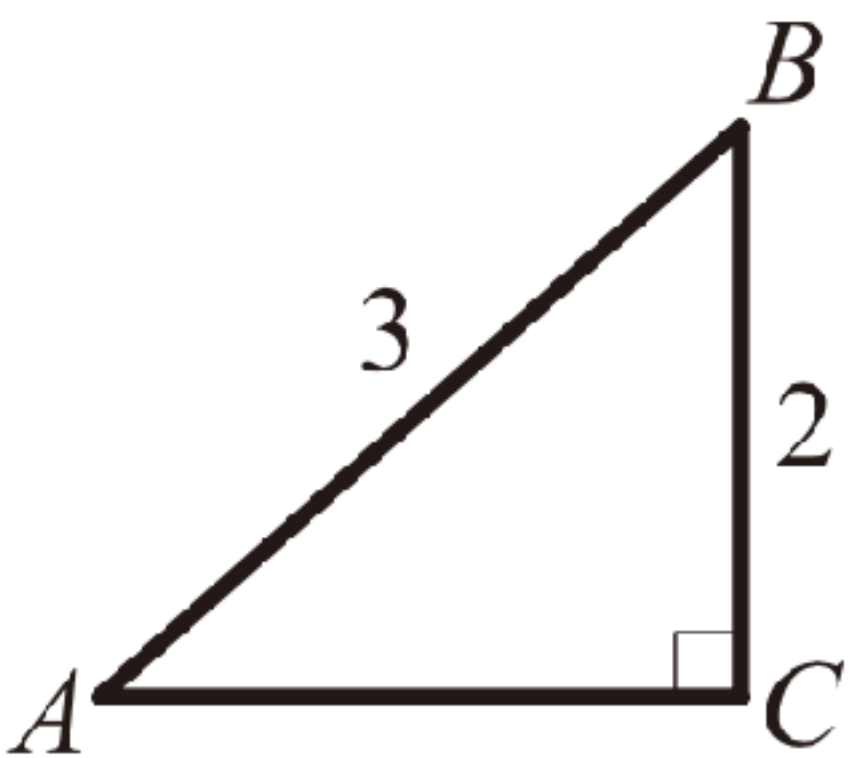
例題 4

已知$\angle A$為銳角且 $\sin A=\dfrac{2}{3}$，求 $\cos A$ 和 $\tan A$ 的值．

三角函數值是邊長比值

作一直角$\triangle ABC$，使$\angle C$為直角，

$\angle A$ 的對邊長度為 2，斜邊長度為 3



$$cosA=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$tanA=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

講義P2演練

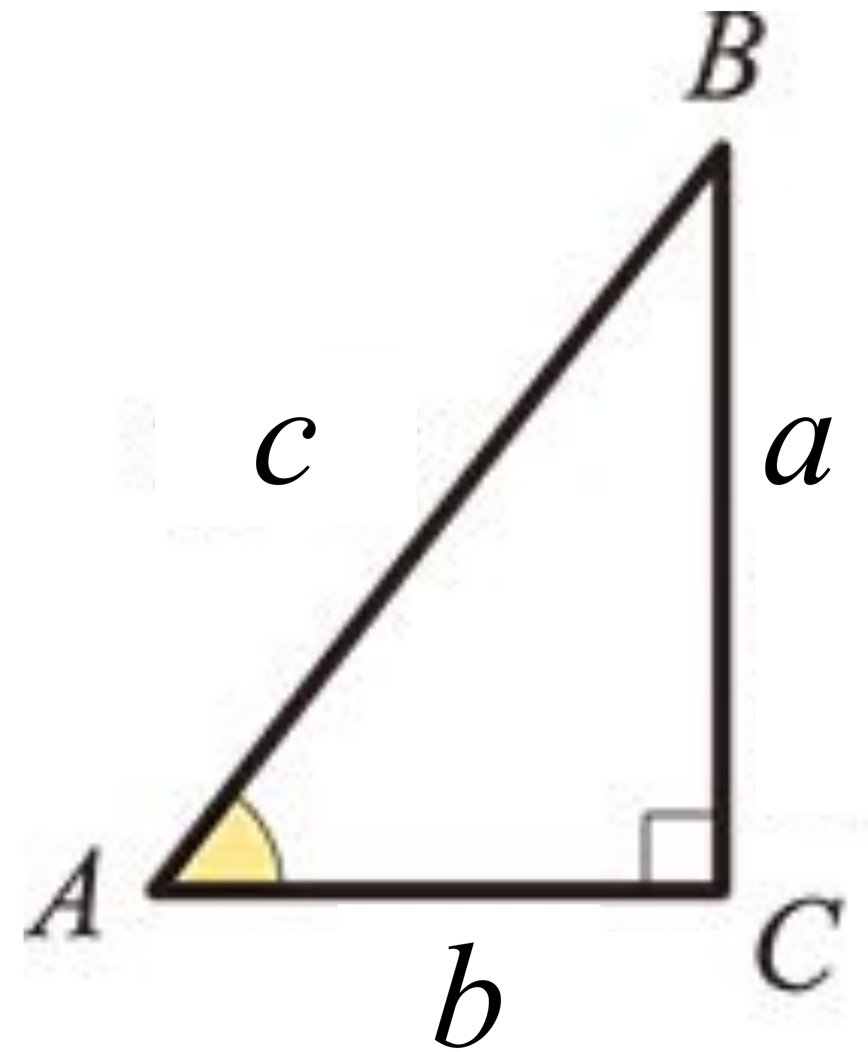
演練 2-2

試求下列各式的值：

(1) $\sin^2 30° + \cos^2 60° + \tan 60° \cos 30°$ ．　(2) $(1+\sin 30° + \sin 45°)(1+\cos 60° - \cos 45°)$ ．

Ans：(1) 2 ；(2) 7/4

$$\sin A = \frac{a}{c}$$



$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

商數關係

課本P6練習2

若 θ 是一個銳角且 $\tan\theta=2$，求 $\dfrac{2\sin\theta-\cos\theta}{2\sin\theta+\cos\theta}$ 的值．

如圖，作直角△ABC 使 $\overline{AC}=1$，$\overline{BC}=2$，

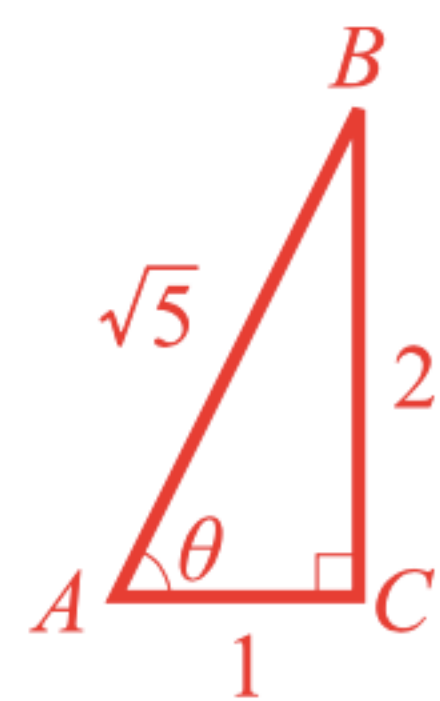
課本P6練習2

若 θ 是一個銳角且 $\tan\theta=2$，求 $\dfrac{2\sin\theta-\cos\theta}{2\sin\theta+\cos\theta}$ 的值.

如圖，作直角$\triangle ABC$ 使 $\overline{AC}=1$，$\overline{BC}=2$，利用畢氏定理可得

$\overline{AB}=\sqrt{5}$ 且 $\angle A=\theta$，得 $\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

故 $\dfrac{2\sin\theta-\cos\theta}{2\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{4-1}{4+1}=\dfrac{3}{5}$.



課本P6練習2

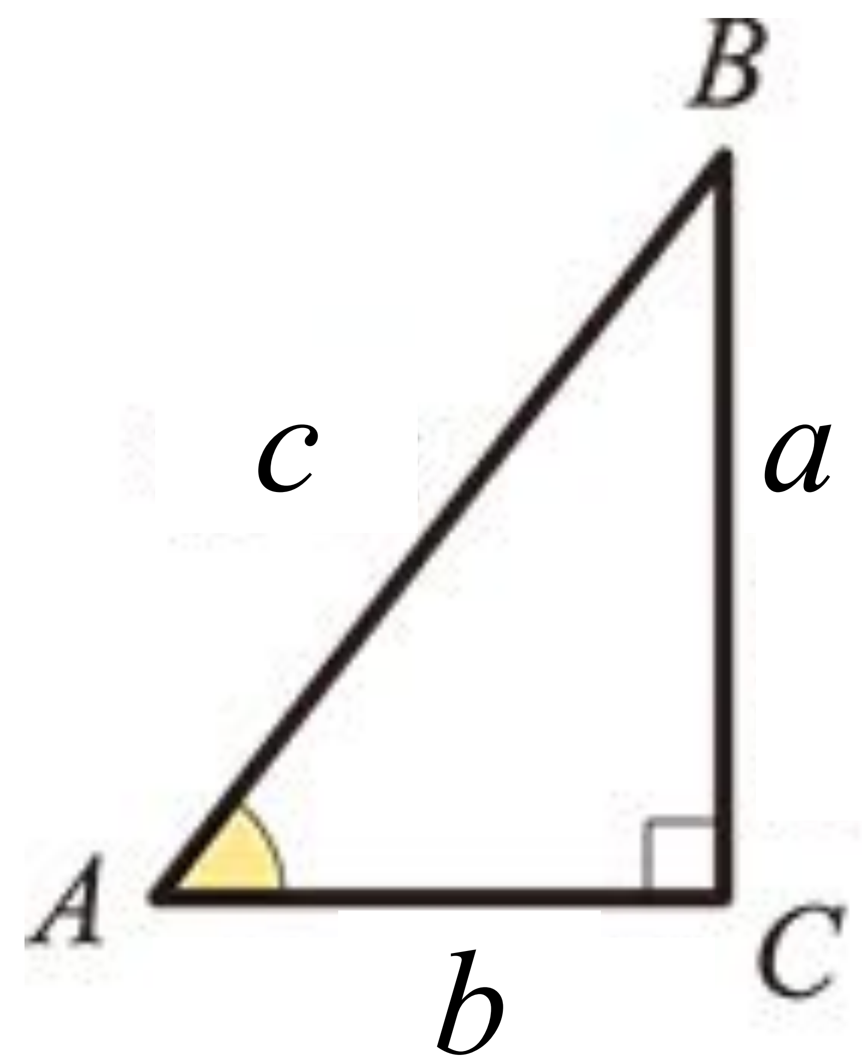
若 θ 是一個銳角且 $\tan\theta = 2$，求 $\dfrac{2\sin\theta - \cos\theta}{2\sin\theta + \cos\theta}$ 的值.

法二

$$\frac{2\sin\theta - \cos\theta}{2\sin\theta + \cos\theta} = \frac{2\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}}{2\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{2\tan\theta - 1}{2\tan\theta + 1} = \frac{3}{5}$$

畢氏定理

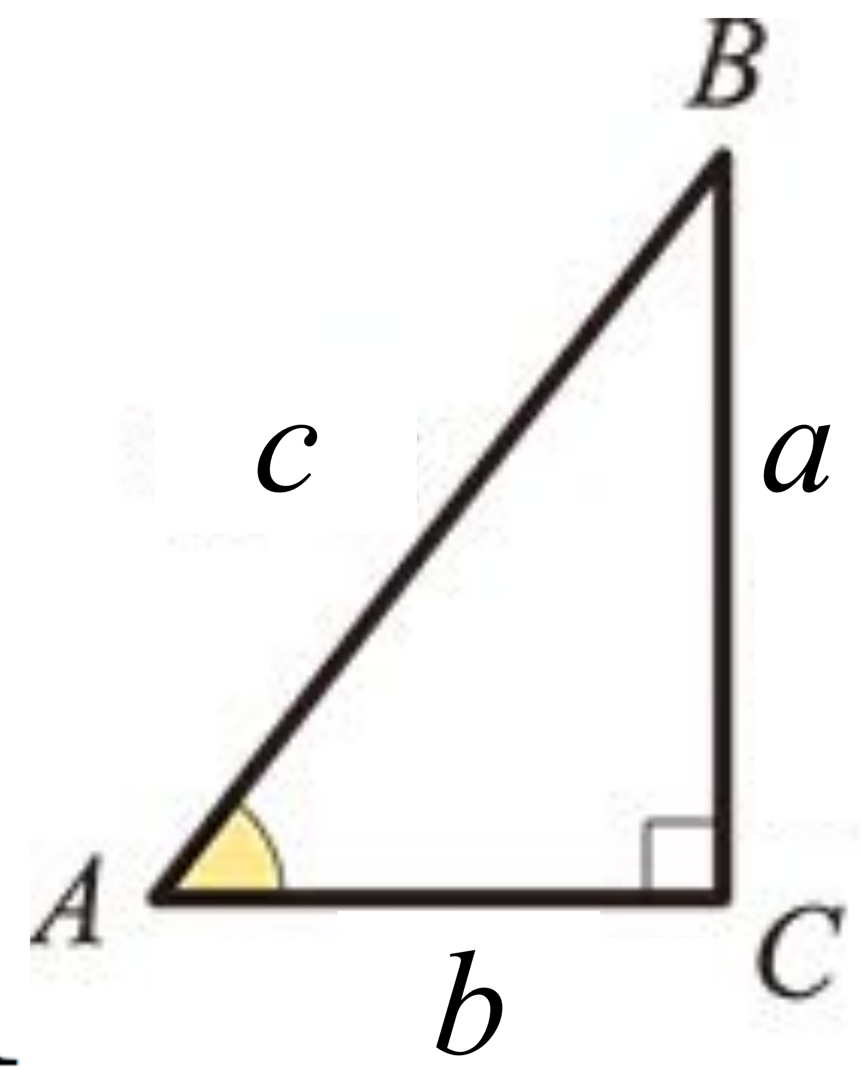


畢氏定理

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$c \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$



$$sin^2 A + cos^2 A = 1$$ 平方關係

課本P8練習

利用商數關係式與平方關係式，完成下列空格：

(1) $\dfrac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} =$ ________，$\tan 20^\circ \cdot \cos 20^\circ =$ ________.

(2) $\sin^2 43^\circ + \cos^2 43^\circ =$ ________.

課本P8練習

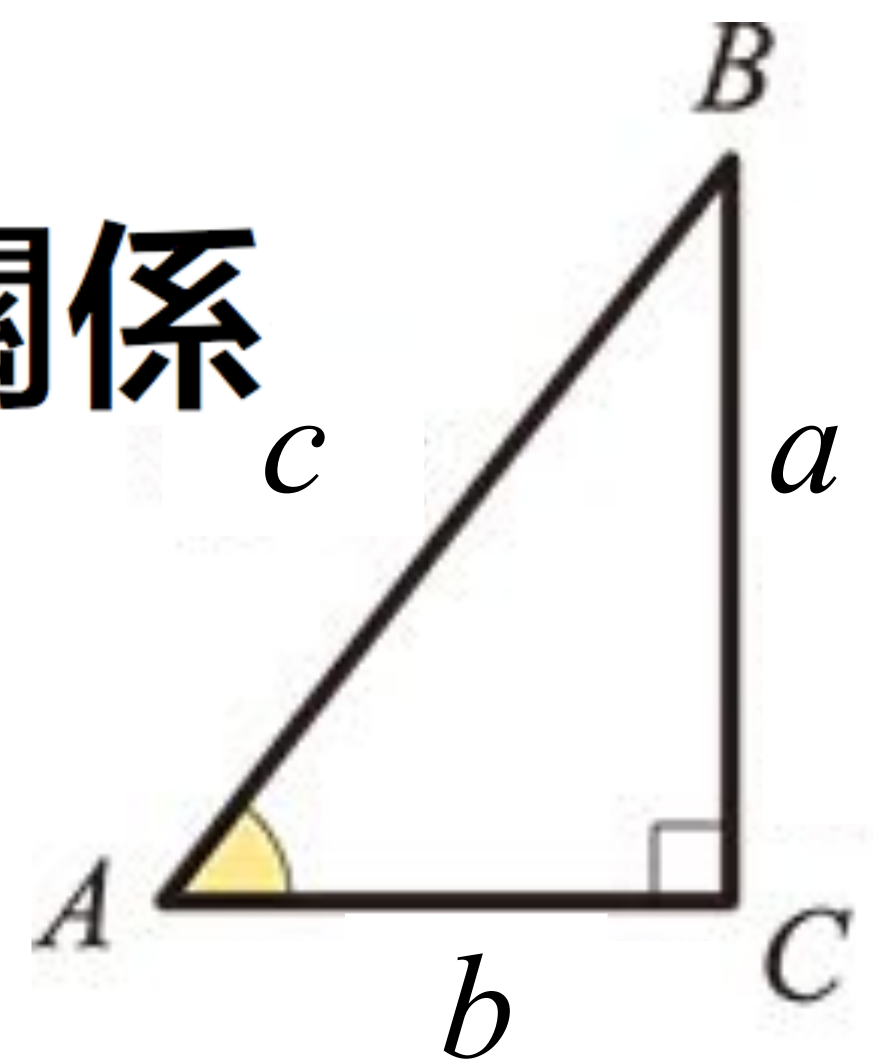
利用商數關係式與平方關係式，完成下列空格：

(1) $\dfrac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} =$ $\underline{\tan 18^\circ}$，$\tan 20^\circ \cdot \cos 20^\circ =$ $\underline{\sin 20^\circ}$．

(2) $\sin^2 43^\circ + \cos^2 43^\circ =$ $\underline{1}$．

$\angle A + \angle B = 90°$

$\angle A$ 與 $\angle B$ 為餘角關係

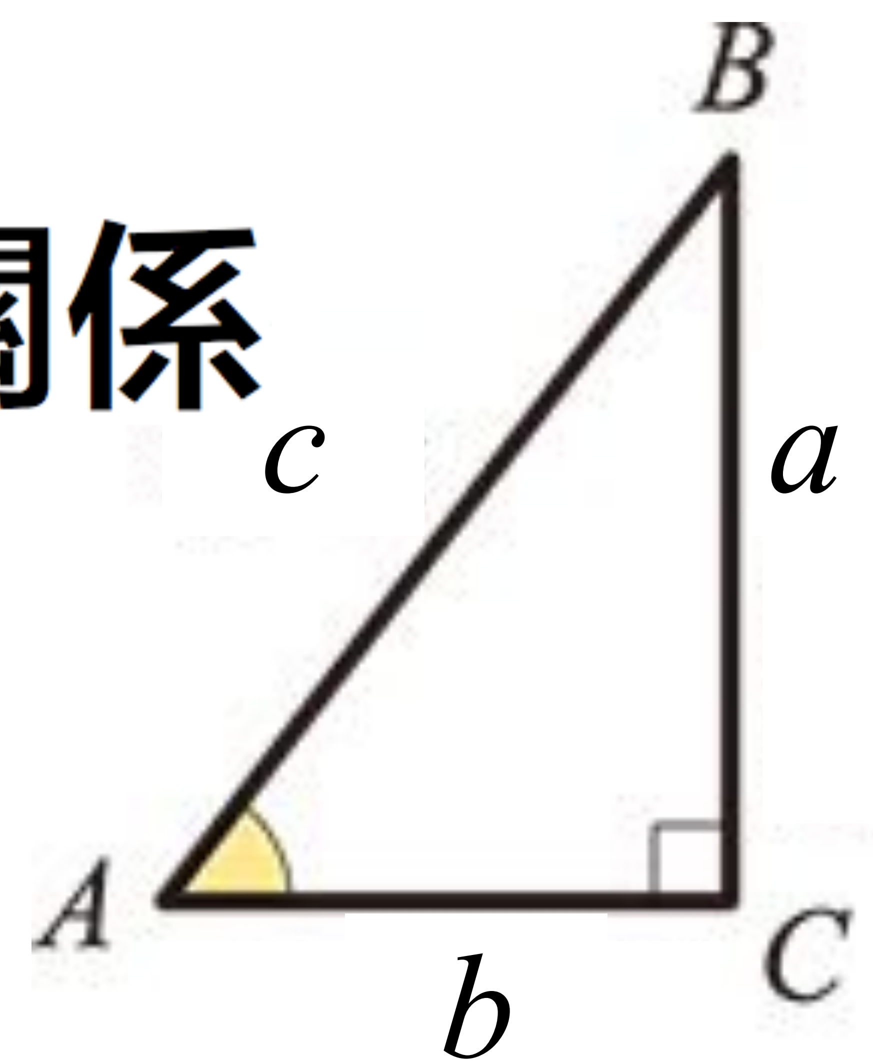


$\angle A + \angle B = 90°$

$\angle A$ 與 $\angle B$ 為餘角關係

a是$\angle A$的對邊

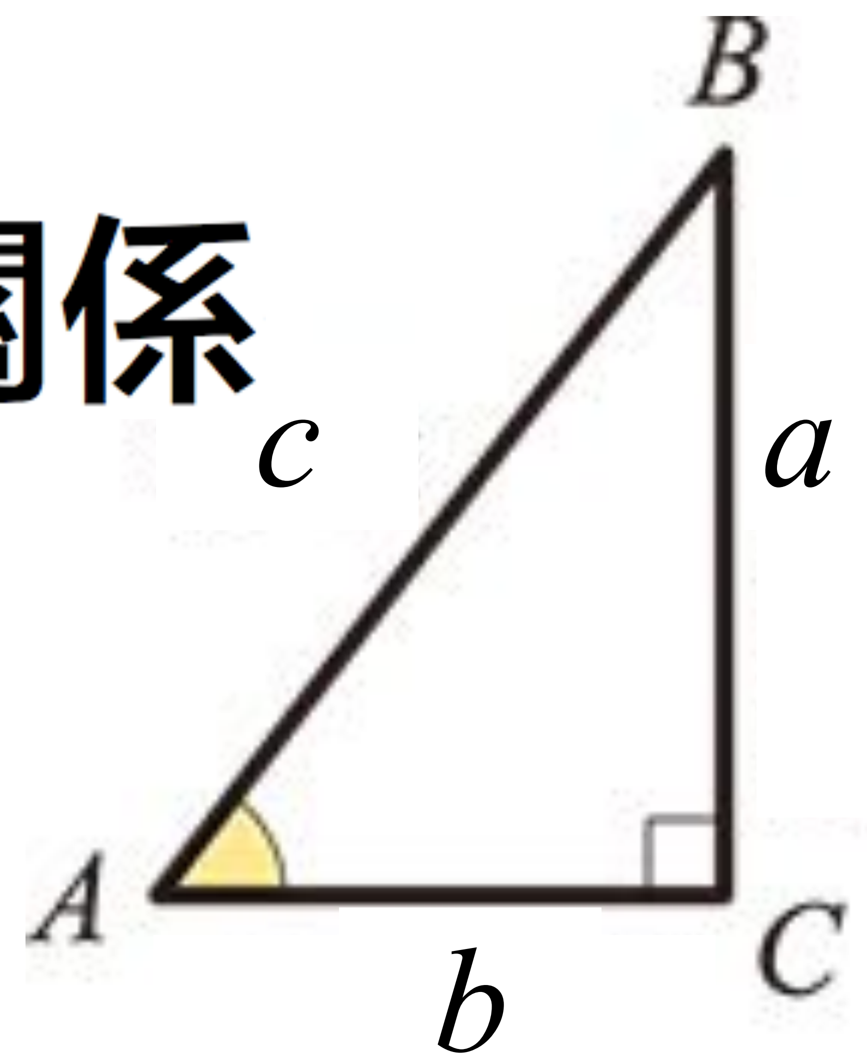
卻是$\angle B$的鄰邊



$$\frac{a}{c} = sinA = cosB$$ 餘角關係

$\angle A + \angle B = 90°$

$\angle A$ 與 $\angle B$ 為餘角關係



b是$\angle A$的鄰邊

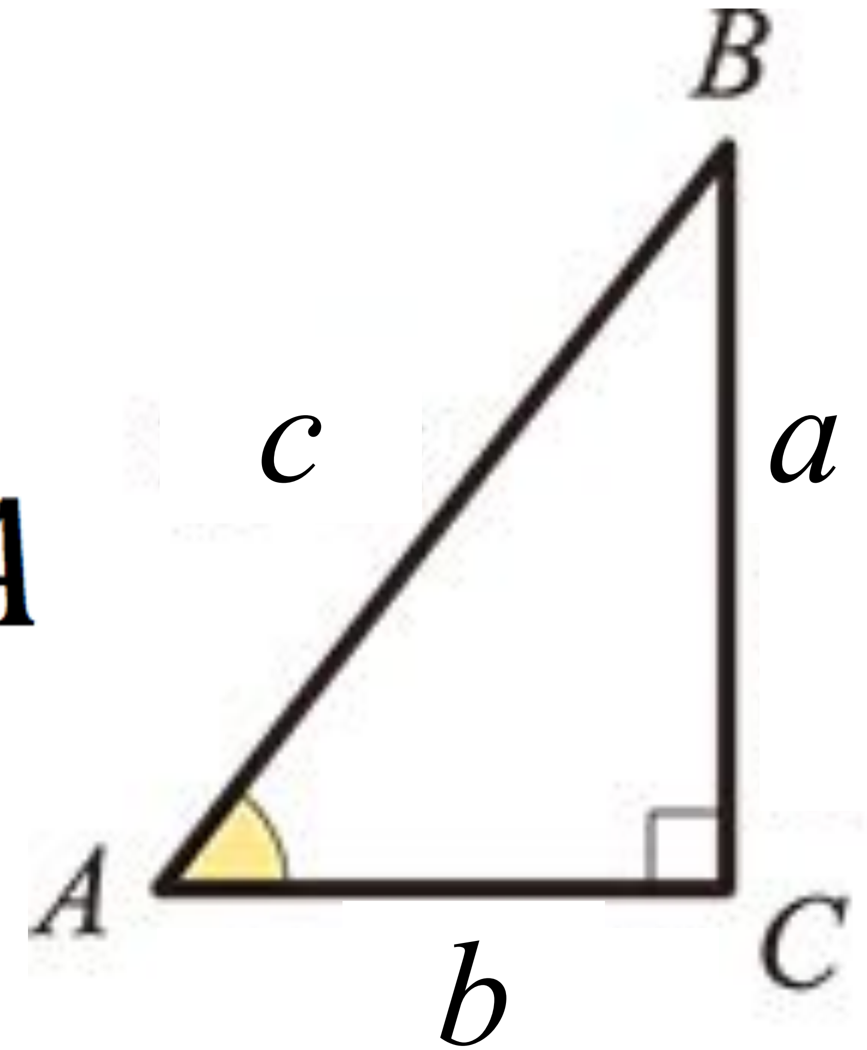
卻是$\angle B$的對邊

$\frac{b}{c} = cosA = sinB$ 餘角關係

餘角關係

$$\angle A + \angle B = 90°$$

$$\Rightarrow \angle B = 90° - \angle A$$



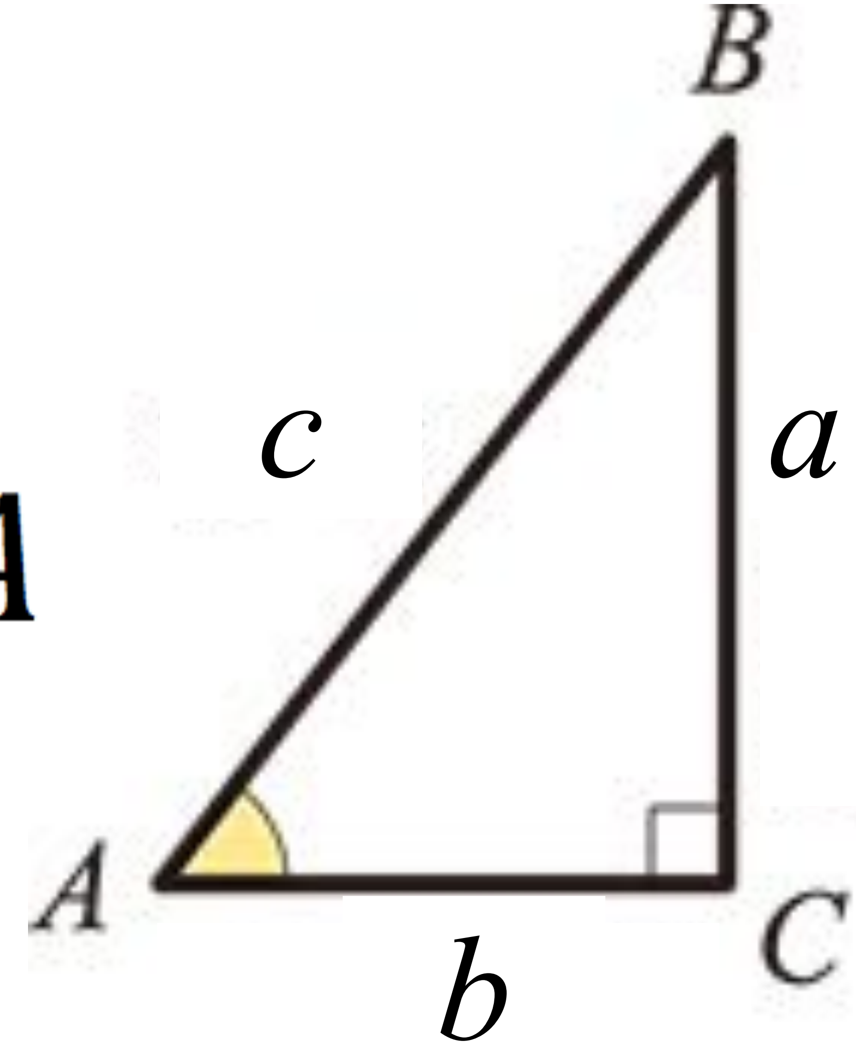
$$\frac{a}{c} = sinA = cosB$$

$$cos(90° - A) = sinA$$

餘角關係

$$\angle A + \angle B = 90°$$

$$\Rightarrow \angle B = 90° - \angle A$$



$$\cos(90° - A) = \sin A$$

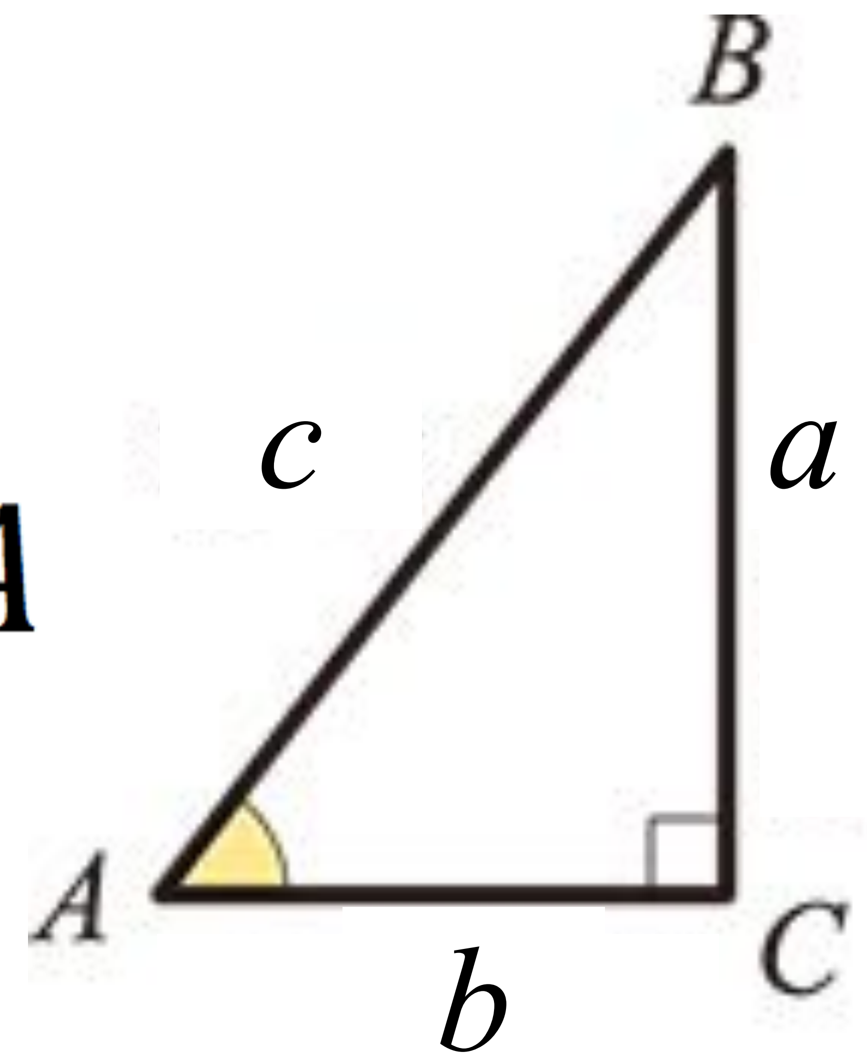
$$\frac{b}{c} = \cos A = \sin B$$

$$\sin(90° - A) = \cos A$$

餘角關係

$$\angle A + \angle B = 90°$$

$$\Rightarrow \angle B = 90° - \angle A$$



$$\boxed{\begin{gathered} \cos(90° - A) = \sin A \\ \sin(90° - A) = \cos A \end{gathered}}$$

	$sin\theta$	$cos\theta$	$tan\theta$
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$15°$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
$75°$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$

課本P9例題6

例題 6

求下列各式的值：

(1) $\cos^2 34^\circ + \cos^2 56^\circ$．

(2) $\dfrac{1}{\cos^2 25^\circ} - \dfrac{1}{\tan^2 65^\circ}$．

Ans：(1) 1 ；(2) 1

課本P10練習

練習

求下列各式的值：

(1) $\sin^2 67.2^\circ + \sin^2 22.8^\circ$.

(2) $\dfrac{1}{\tan^2 55^\circ} - \dfrac{1}{\cos^2 35^\circ}$.

Ans：(1) 1 ；(2) −1

課本P10例題7

例題 7

設 θ 為銳角，化簡下列各式:

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$.

(2) $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}-\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$.

Ans：(1) 2 ；(2) 0

課本P10練習

練習

設 θ 為銳角，化簡下列各式：

(1) $\sin^4\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^2\theta$．

(2) $\sin^4\theta-\cos^4\theta+2\cos^2\theta$．

Ans：(1) 1 ；(2) 1

課本P12例題9

例題 9

已知 θ 為銳角，且 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，求下列各值：

(1) $\sin\theta\cdot\cos\theta$．

(2) $\sin\theta-\cos\theta$．

(3) $\sin^4\theta+\cos^4\theta$．

θ為銳角 $\Rightarrow$ 三角函數值為正

$$(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2$$

課本P12例題9

例題 9

已知 θ 為銳角，且 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，求下列各值：

(1) $\sin\theta \cdot \cos\theta$.

(2) $\sin\theta-\cos\theta$.

(3) $\sin^4\theta+\cos^4\theta$.

θ為銳角 $\Rightarrow$ 三角函數值為正

$$(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2$$

Ans：(1) 1/2 ；(2) 0 ；(3) 1/2

課本P12練習

練習

已知 θ 為銳角，且 $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{2}$，求下列各值：

(1) $\sin\theta \cdot \cos\theta$．

(2) $\sin\theta + \cos\theta$．

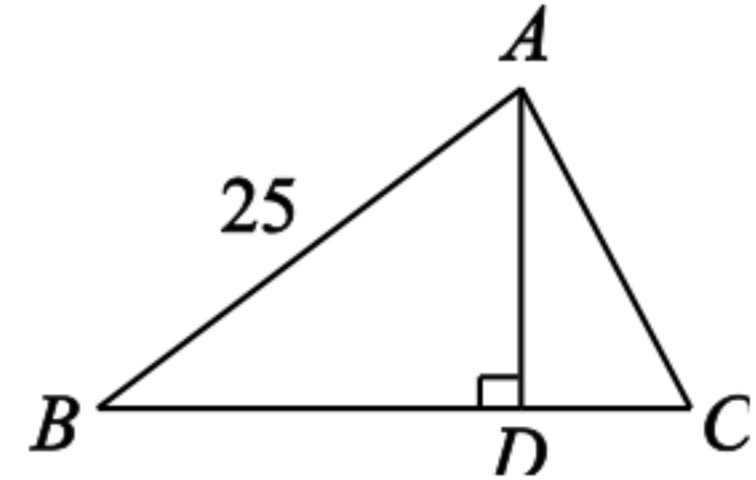
(3) $\sin^3\theta - \cos^3\theta$．

(1) $\dfrac{3}{8}$． (2) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$． (3) $\dfrac{11}{16}$．

講義P5例題5

例題 5【常考題】*Ans*：28

如圖，在△ABC中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{AB}=25$，$\sin B=\dfrac{3}{5}$，$\sin C=\dfrac{15}{17}$，求$\overline{BC}$的長．



講義P7演練8

演練 8

試求 $\sin^2 10° + \sin^2 20° + \sin^2 30° + \sin^2 40° + \sin^2 50° + \sin^2 60° + \sin^2 70° + \sin^2 80°$ 的值．

餘角關係 $\sin 80° = \cos 10°$

平方關係 $\sin^2 10° + \cos^2 10° = 1$

講義P7演練8

演練 8 $Ans：4$

試求 $\sin^2 10° + \sin^2 20° + \sin^2 30° + \sin^2 40° + \sin^2 50° + \sin^2 60° + \sin^2 70° + \sin^2 80°$ 的值．

餘角關係 $\sin 80° = \cos 10°$

平方關係 $\sin^2 10° + \cos^2 10° = 1$

講義P8演練10

演練 10

設 θ 為銳角，$\sin\theta = k$，試用 k 表出 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$．

Ans：
$$\cos\theta = \sqrt{1-k^2}$$
$$\tan\theta = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$$

講義P10例題12

例題 12【常考題】

設 $\sin\theta$ ，$\cos\theta$ 為方程式 $3x^2-4x+k=0$ 的兩根，求

(1)實數 k 的值．　(2) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$ 的值．

Ans：(1) 7/6

(2) 18/7

The End