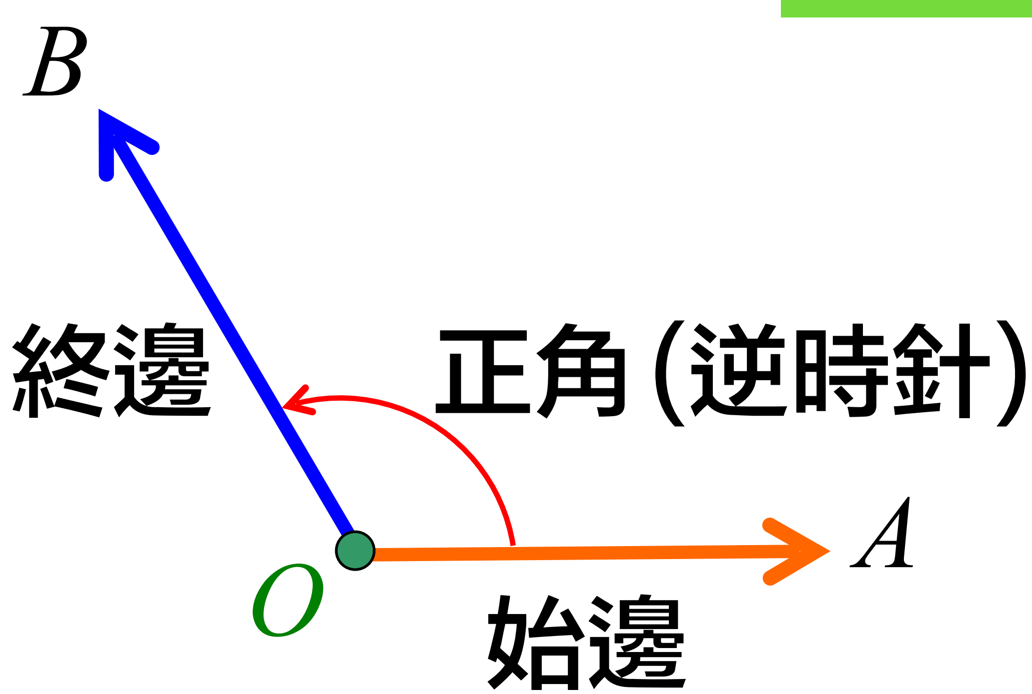
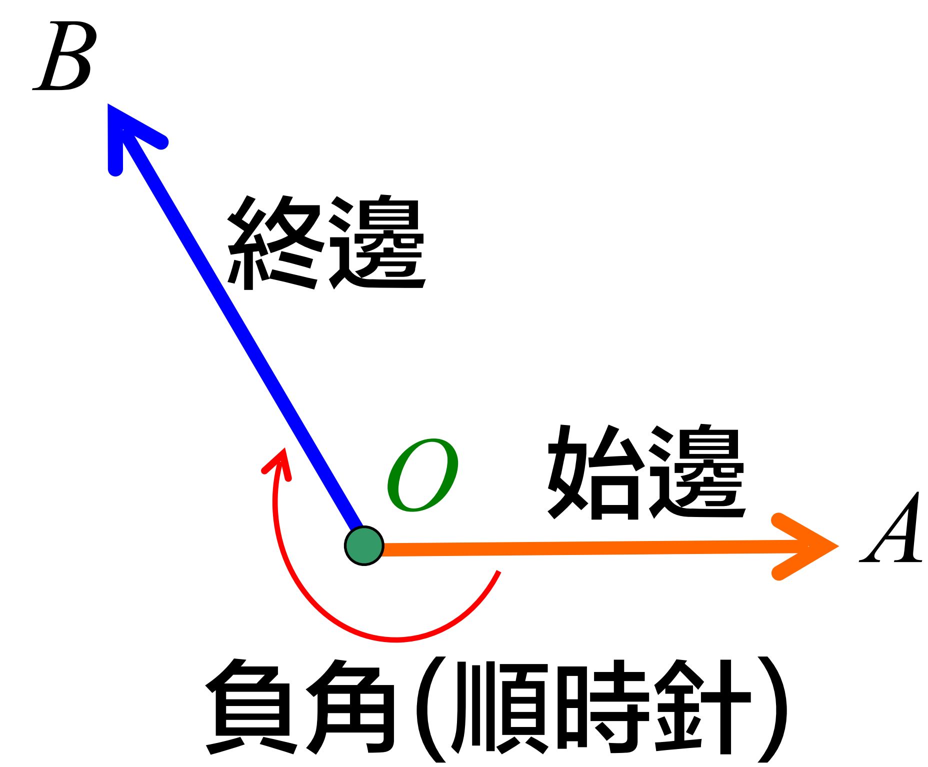
課本P15-
廣義角與極坐標

廣義角

一個角是由端點相同的兩射線所組成的，而角的大小是表示兩射線張開的程度。

平面上，將射線OA繞著O點旋轉到射線OB所成的角。 有向角



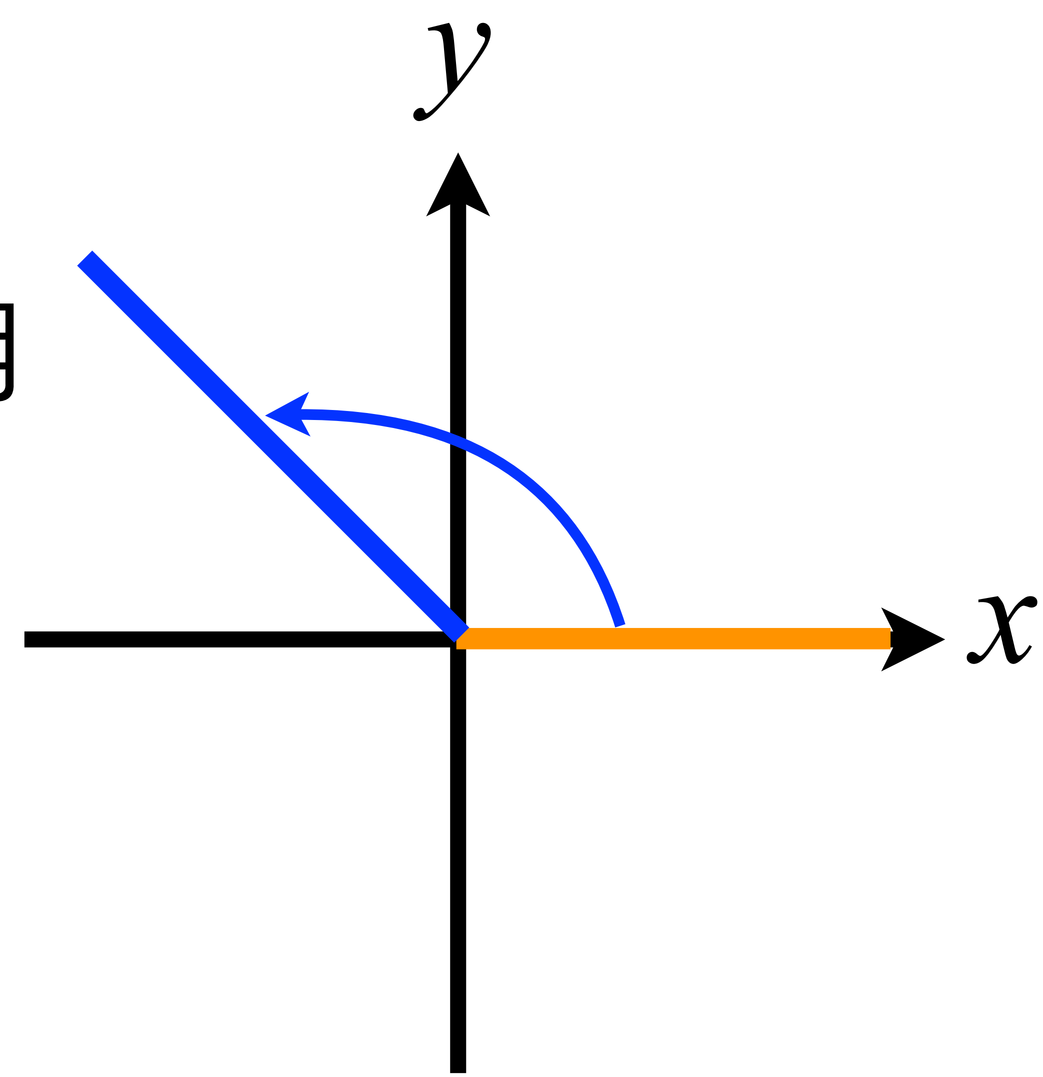


標準位置角

標準位置角：①角的頂點與原點重合。

②角的始邊在 x 軸正向上。

當角的終邊落在第一、二、三或四象限，分別稱這個角為第一、二、三或四象限角

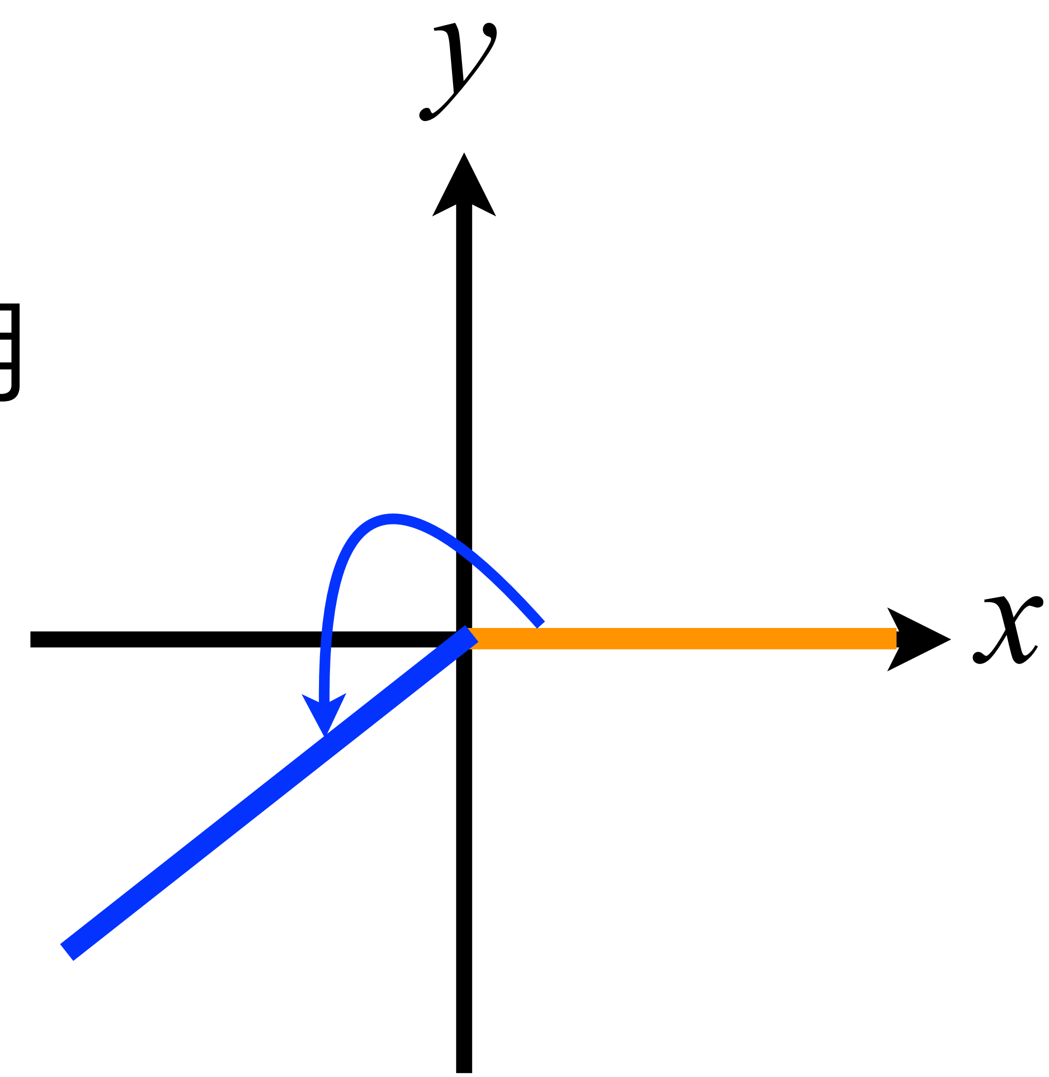


標準位置角

標準位置角：①角的頂點與原點重合。

②角的始邊在 x 軸正向上。

當角的終邊落在第一、二、三或四象限，分別稱這個角為第一、二、三或四象限角

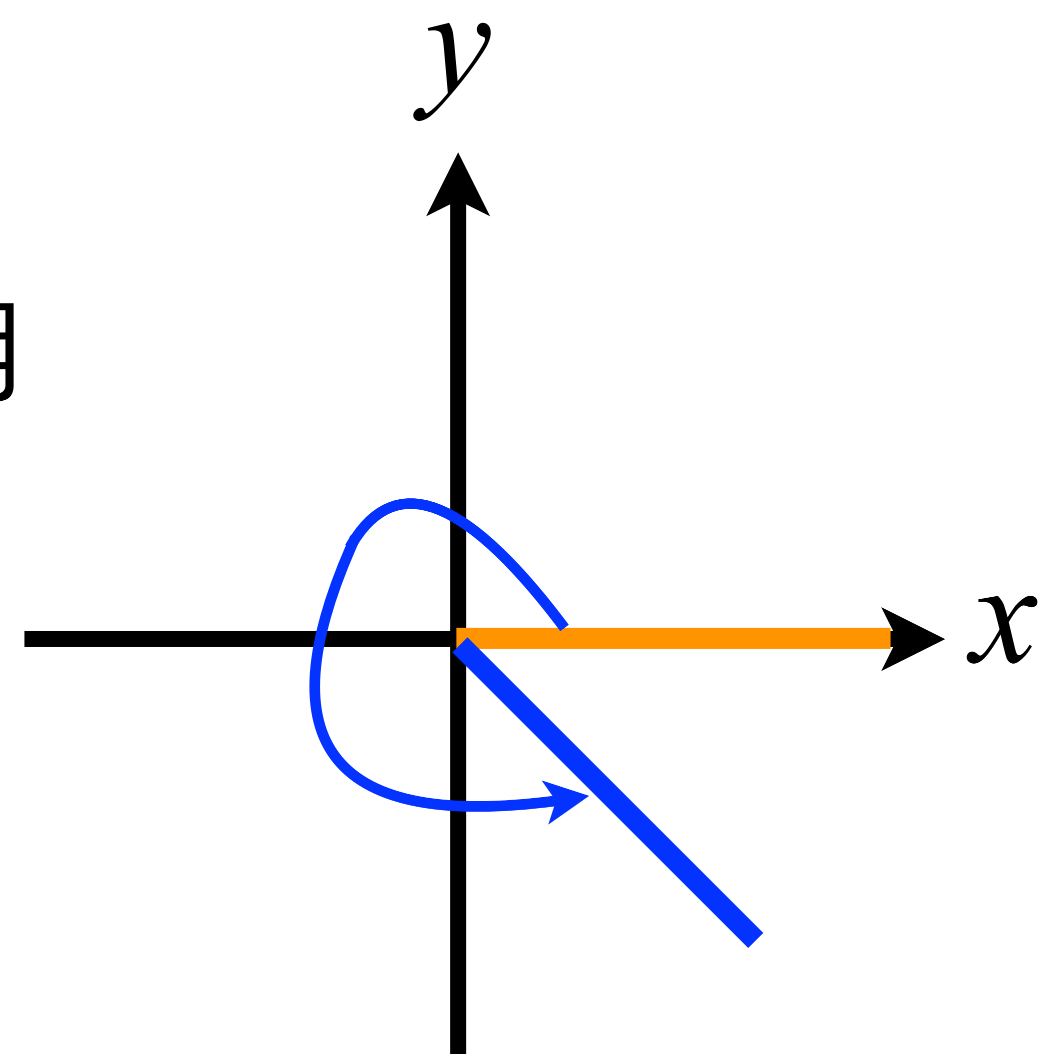


標準位置角

標準位置角：①角的頂點與原點重合。

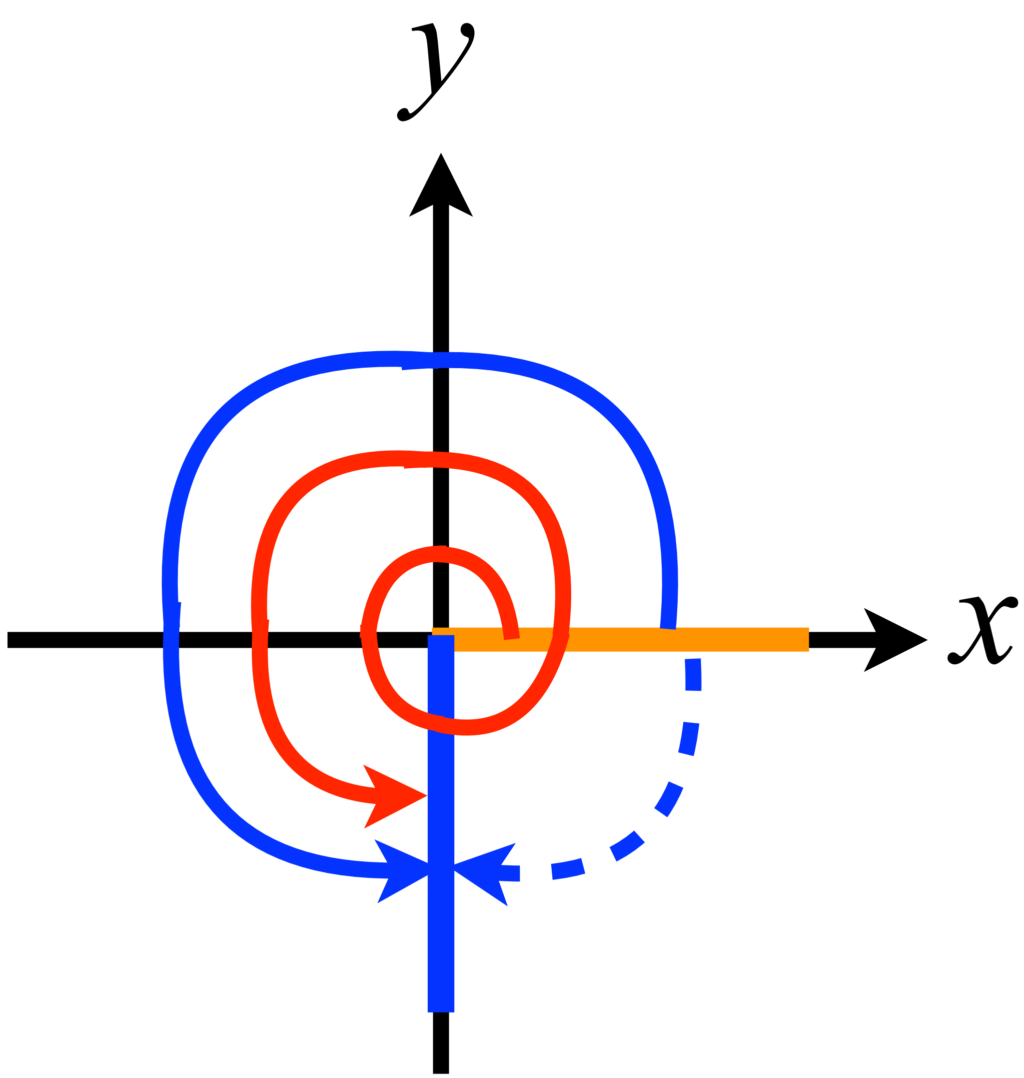
②角的始邊在 x 軸正向上。

當角的終邊落在第一、二、三或四象限，分別稱這個角為第一、二、三或四象限角



象限角

象限角：當角的終邊落在 x 軸或 y 軸上。



同界角

有相同始邊、終邊的角

有相同始邊、終邊的任意兩同界角的度數相差 360°的整數倍。

課本P17練習

練習

下列何者是 105° 的同界角？

(1) 465°.　　(2) -105°.

(3) 75°.　　(4) -255°.

Ans：(1)(4)

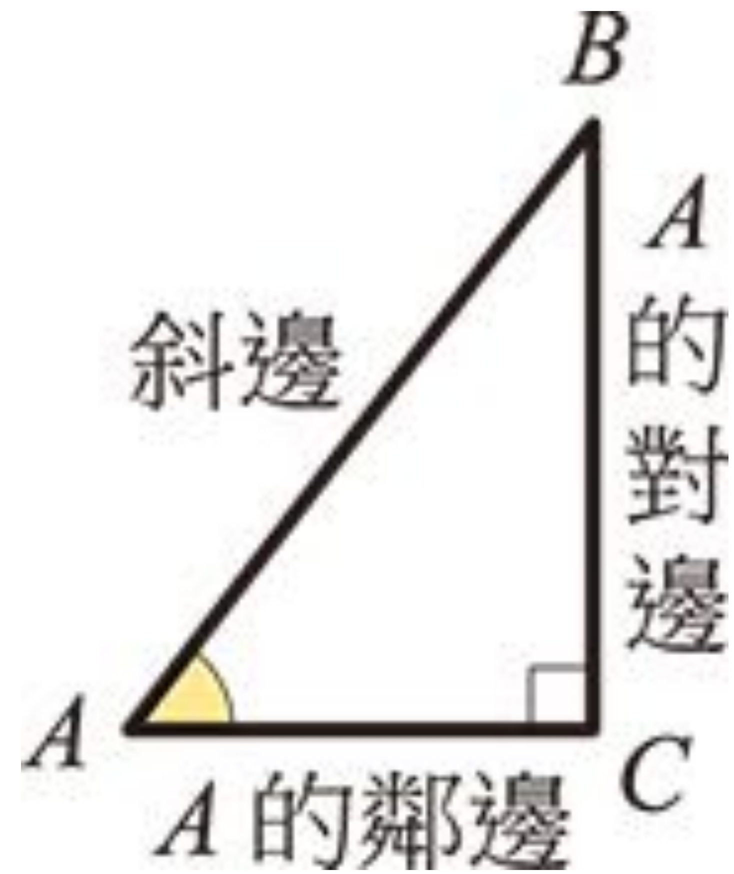
$$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$，稱作 $\angle A$ 的**正弦函數**.

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$，稱作 $\angle A$ 的**餘弦函數**.

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\angle A \text{ 的鄰邊}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$，稱作 $\angle A$ 的**正切函數**.

$$\overline{AB} = l \quad \frac{\overline{BC}}{l} = sinA$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = l \cdot sinA$$



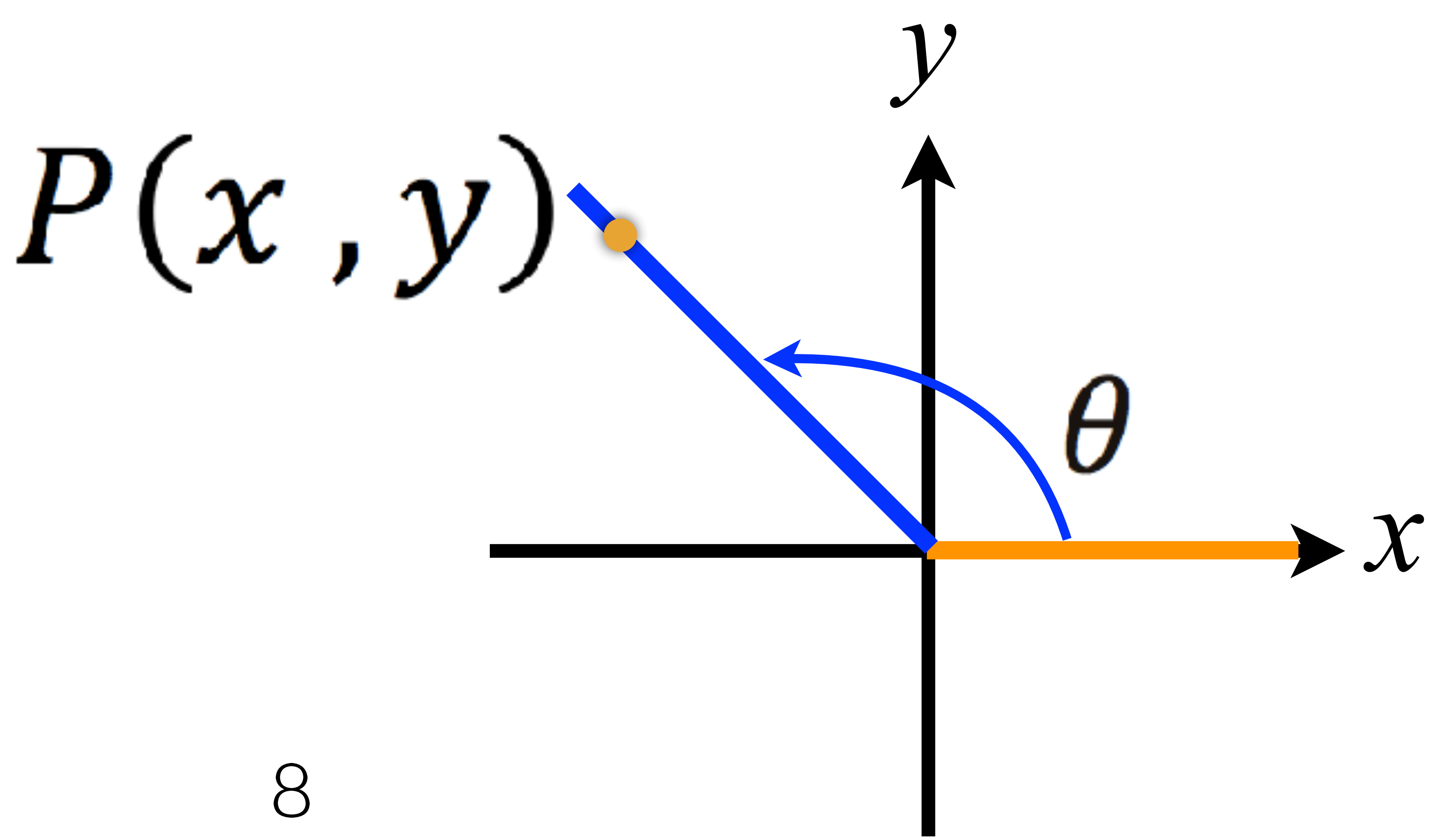
如何定義
廣義角的三角函數

廣義角三角函數

設 θ 為標準位置角

終邊上一點$P \Rightarrow \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= r \neq 0$



廣義角三角函數

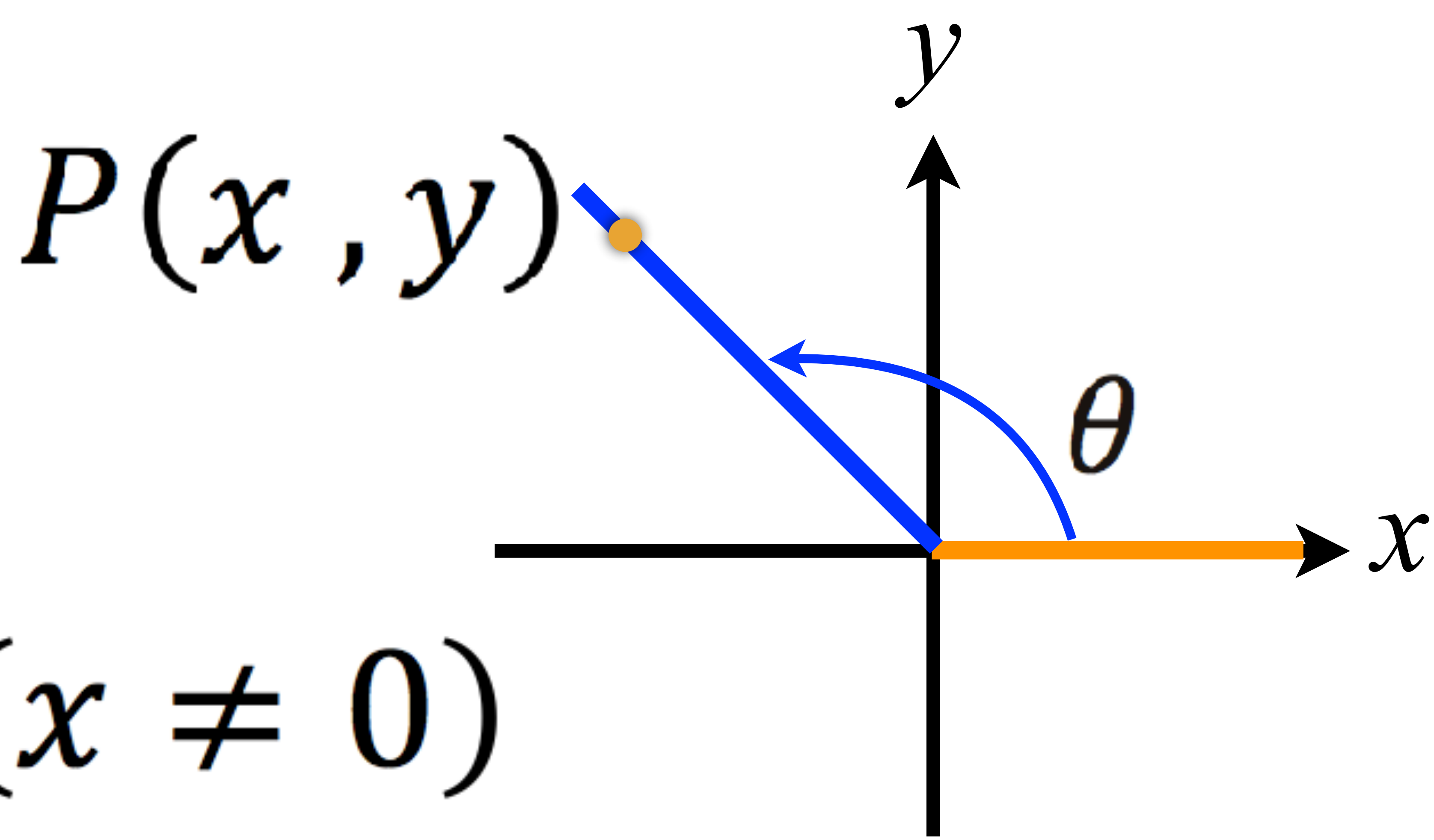
設 θ 為標準位置角

終邊上一點P => $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2} = r \neq 0$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$



廣義角三角函數

設 θ 為標準位置角

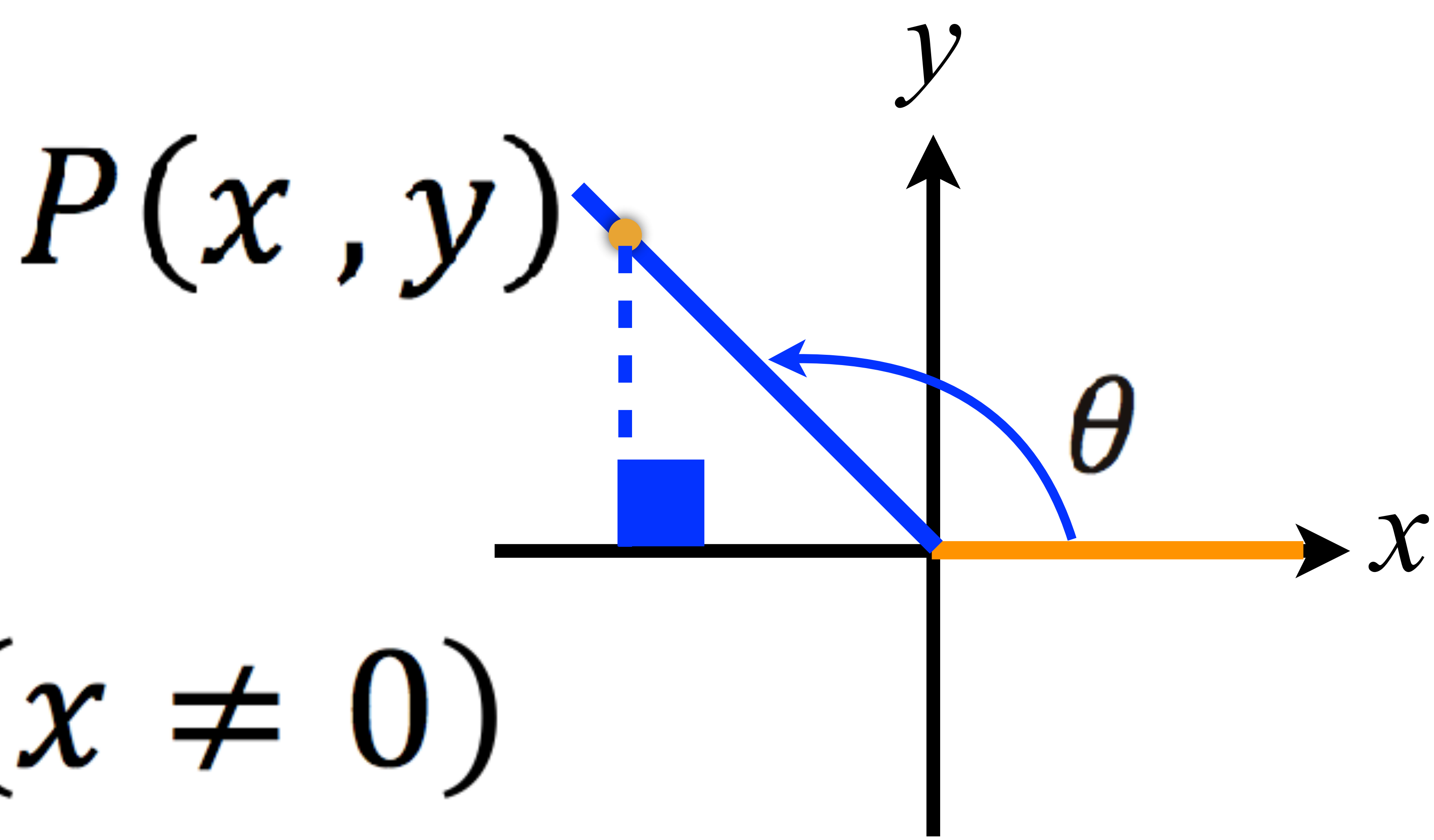
終邊上一點P => $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= r \neq 0$

$$sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$tan\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$



廣義角三角函數

設 θ 為標準位置角

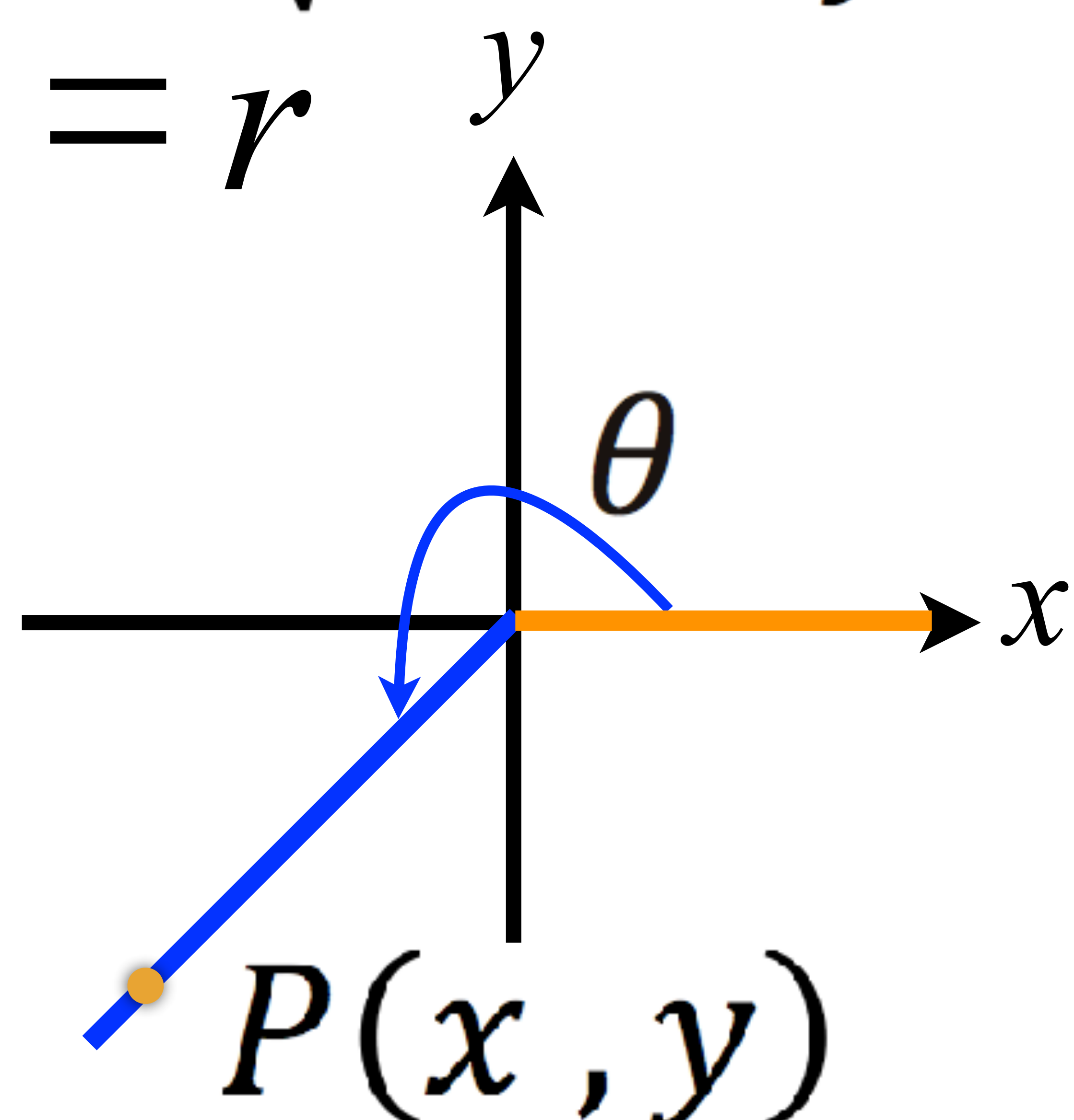
終邊上一點P => $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= r$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



廣義角三角函數

設 θ 為標準位置角

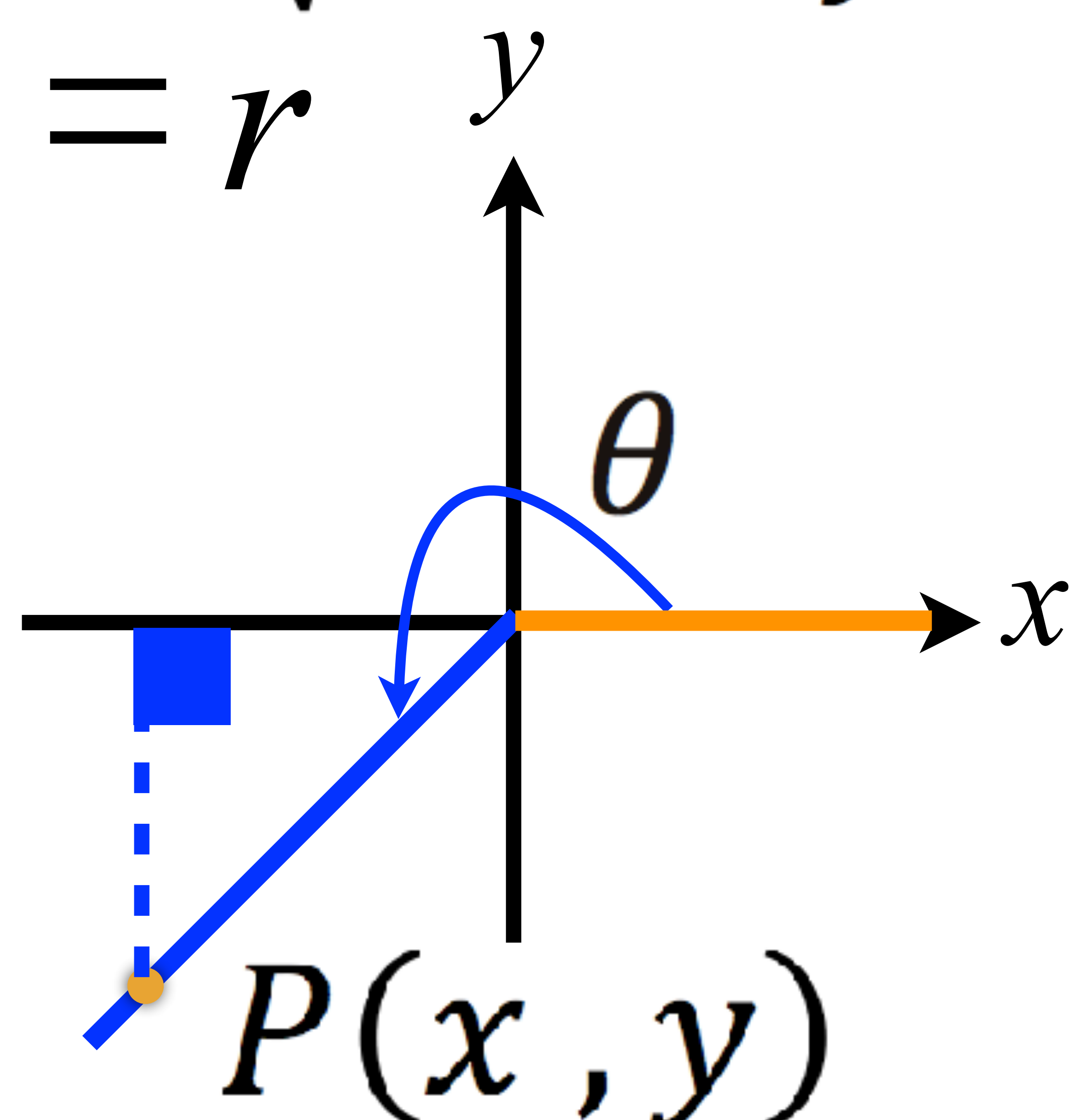
終邊上一點 P => $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= r$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



廣義角三角函數

設 θ 為標準位置角

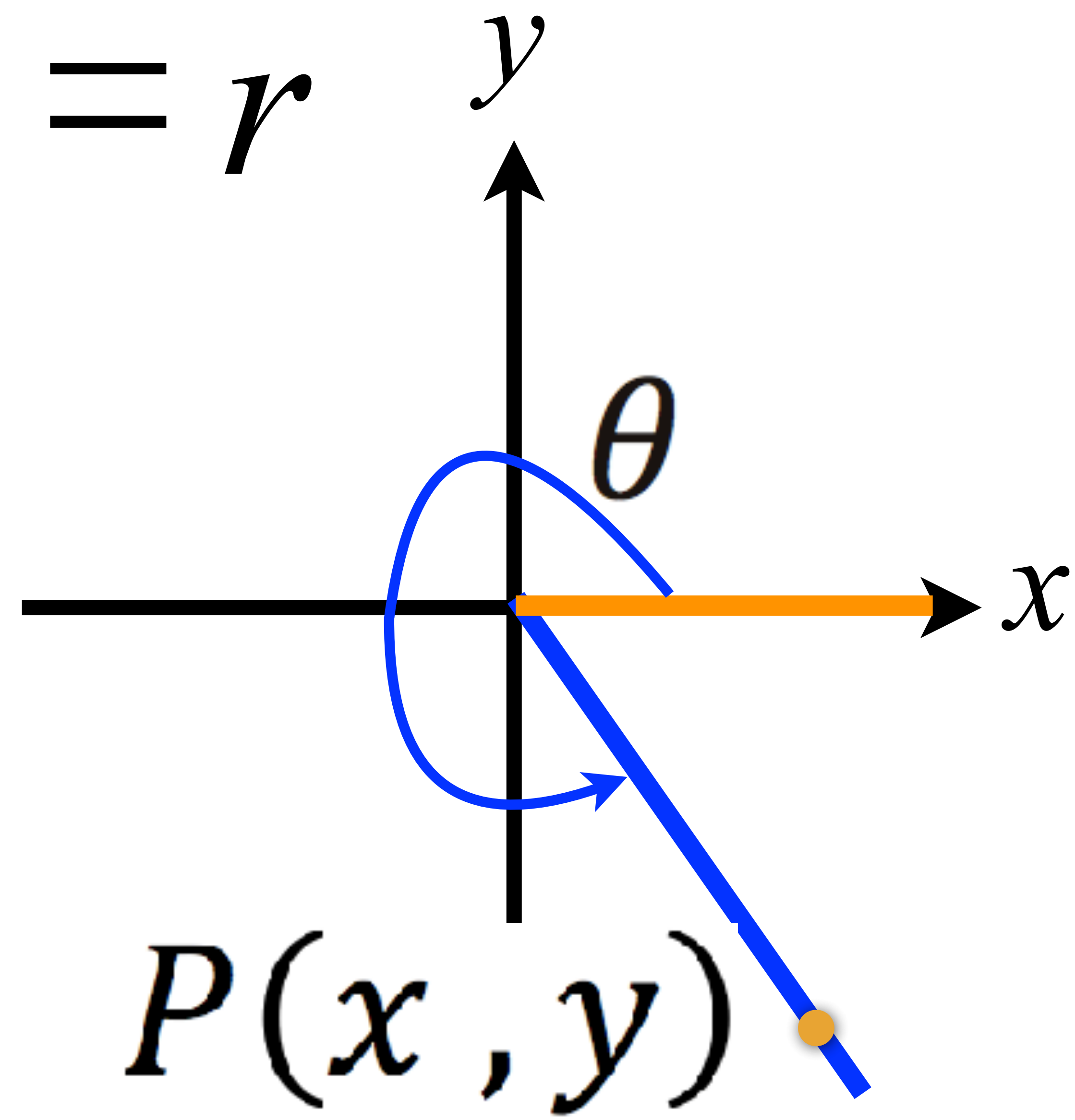
終邊上一點$P \Rightarrow \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= r$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



廣義角三角函數

設 θ 為標準位置角

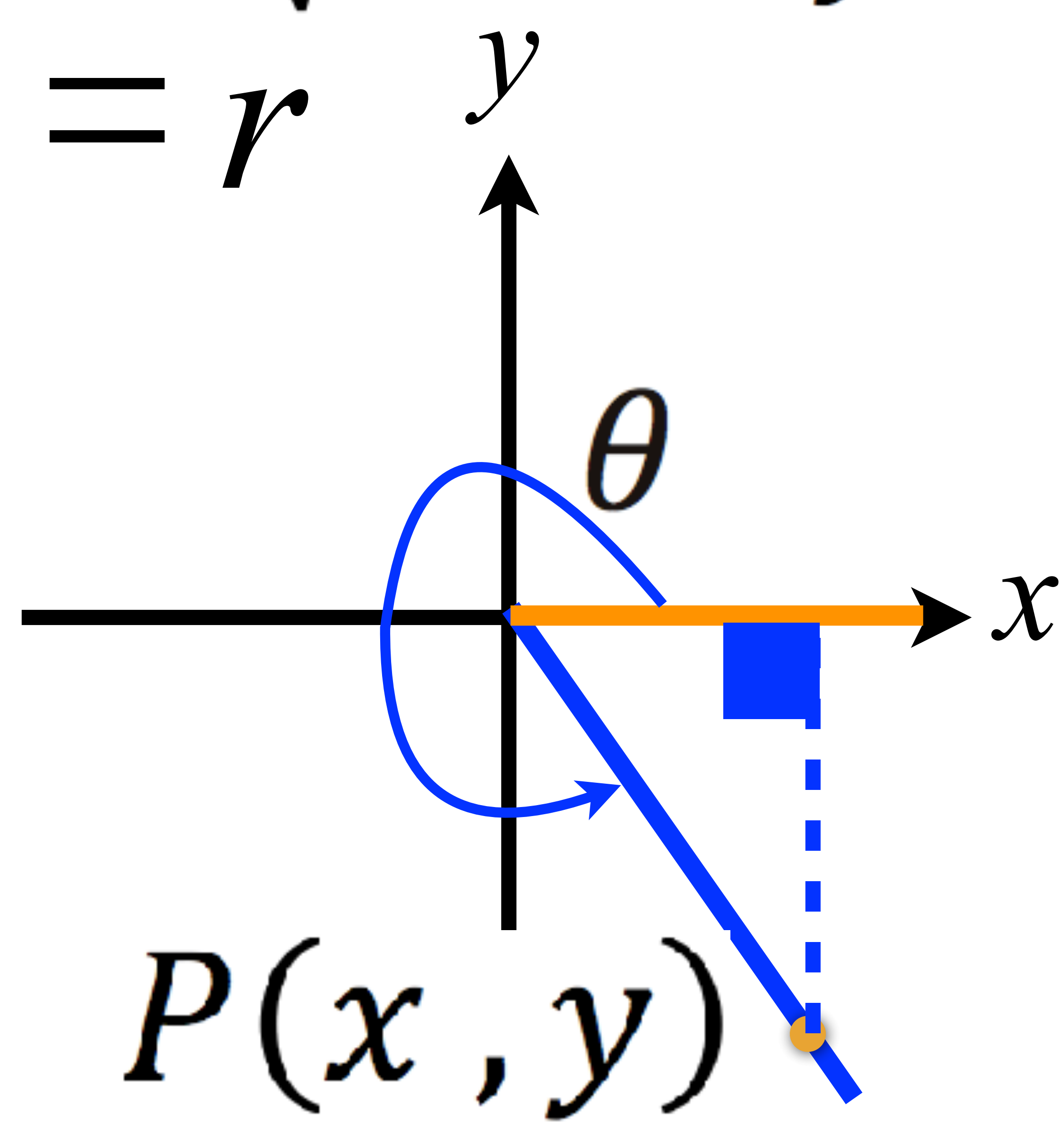
終邊上一點P => $\overline{OP} = \sqrt{x^2+y^2}$

$= r$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

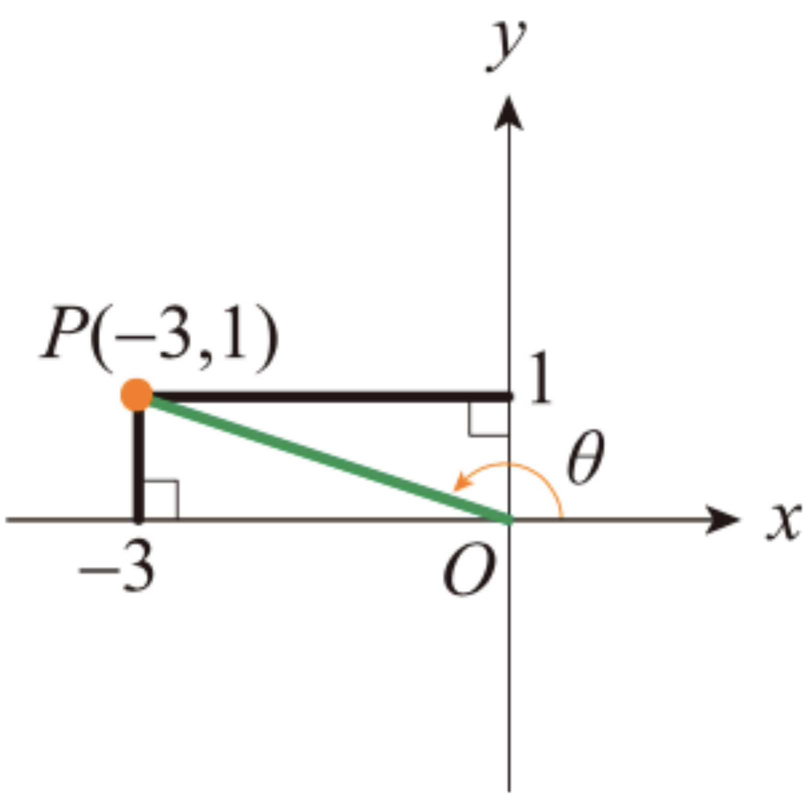


課本P19練習

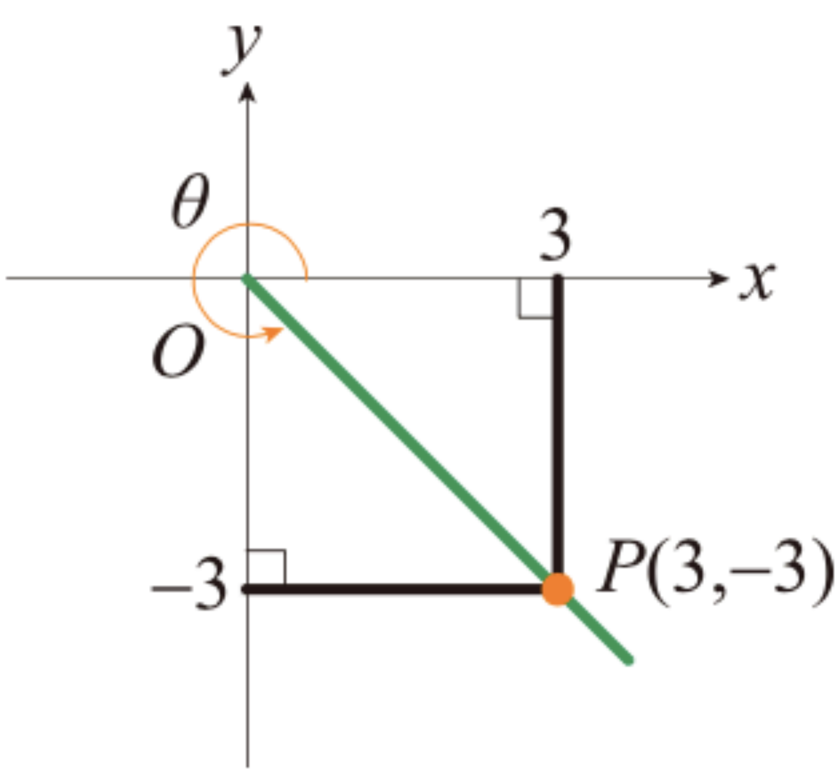
練習

求下圖中的 $\sin\theta$， $\cos\theta$， $\tan\theta$ 值：

(1)



(2)



Ans ： (1) $\sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\tan\theta=-\frac{1}{3}$.

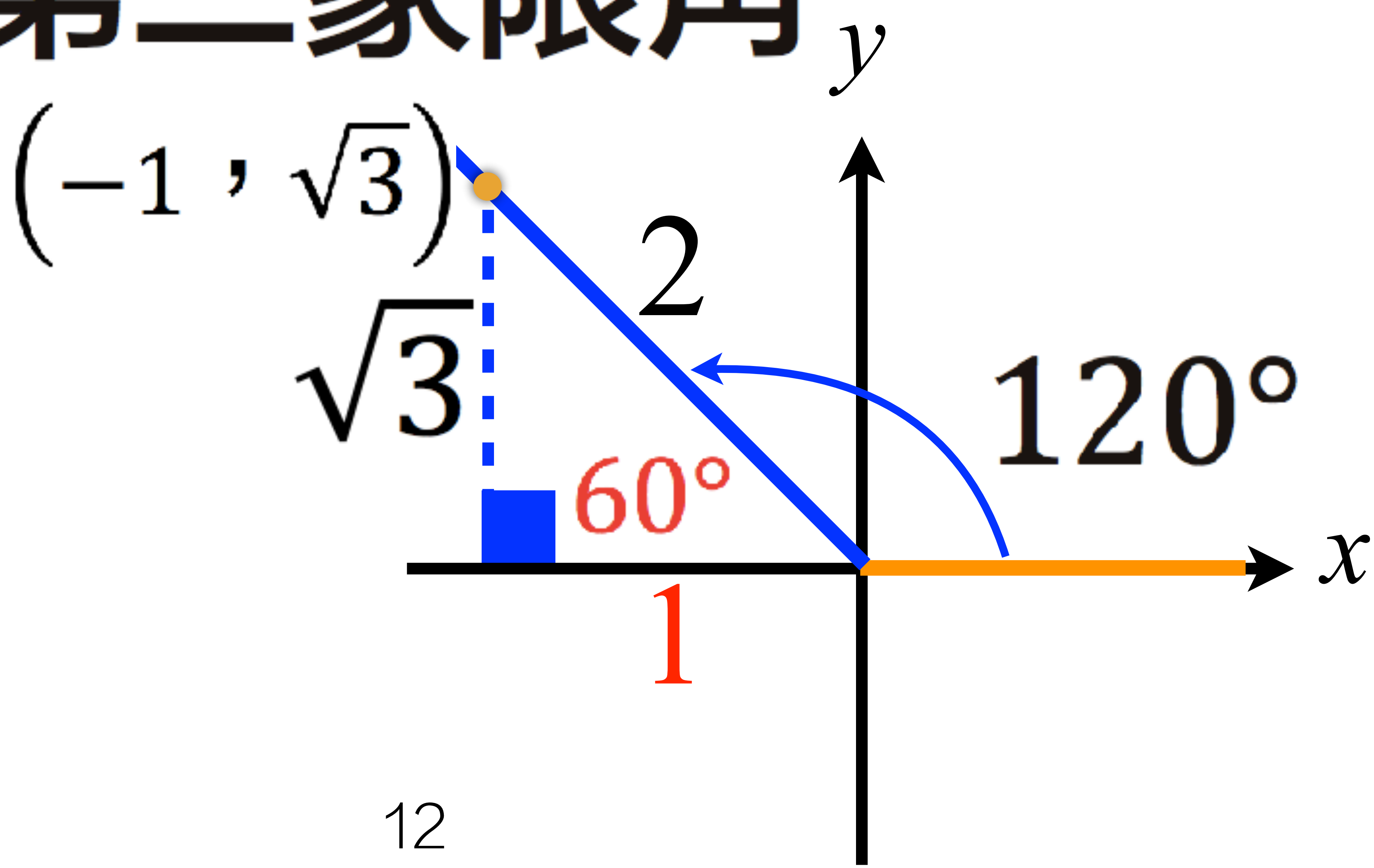
(2) $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$.

課本P19例題2

例題2

求 120° 和 -240° 的 sin，cos 和 tan 值.

120°為第二象限角

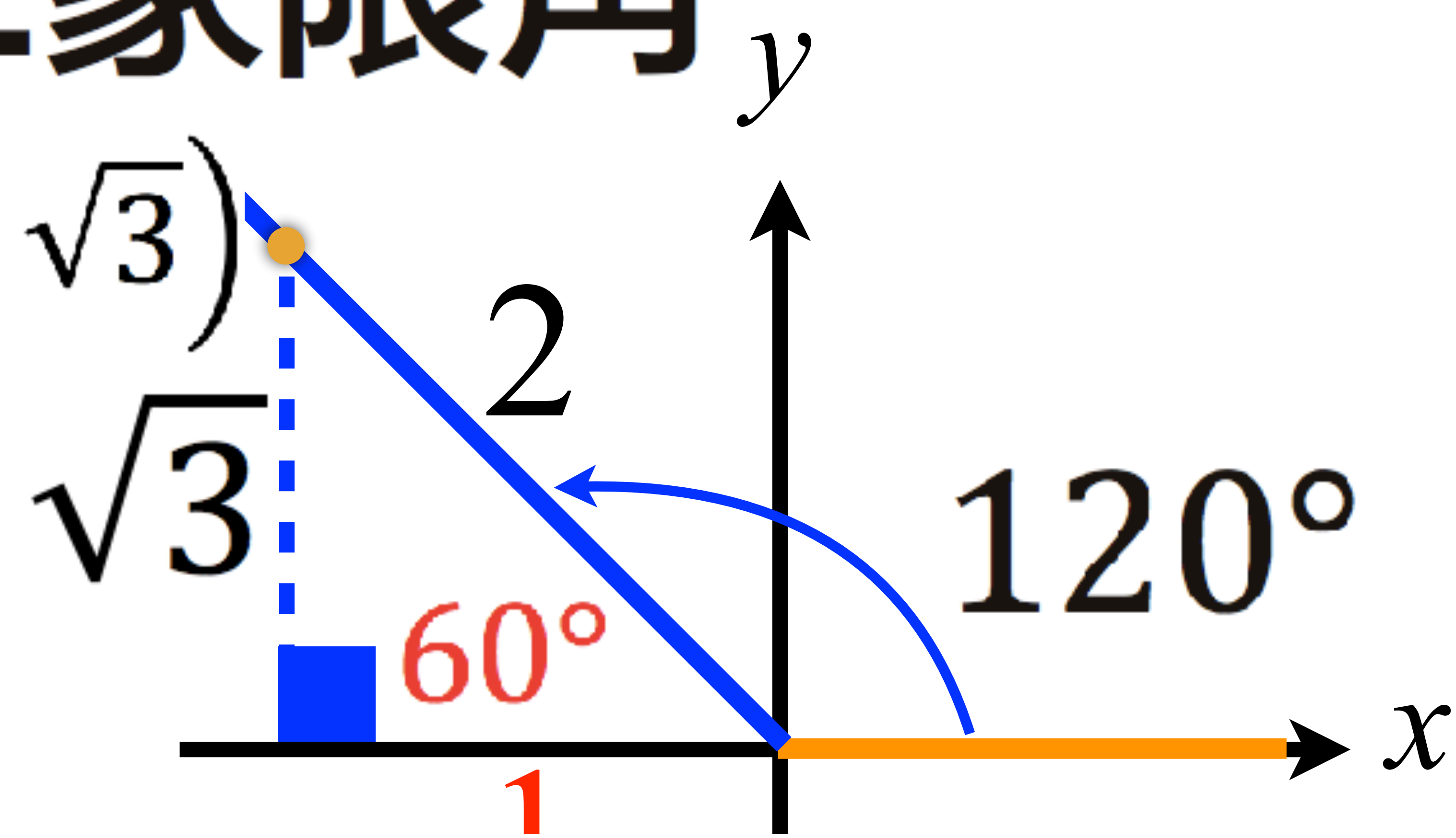


課本P19例題2

例題 2

求 120° 和 −240° 的 sin，cos 和 tan 值.

120°為第二象限角



$$sin120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos120° = \frac{-1}{2}$$

$$tan120° = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

課本P19例題2

例題 2

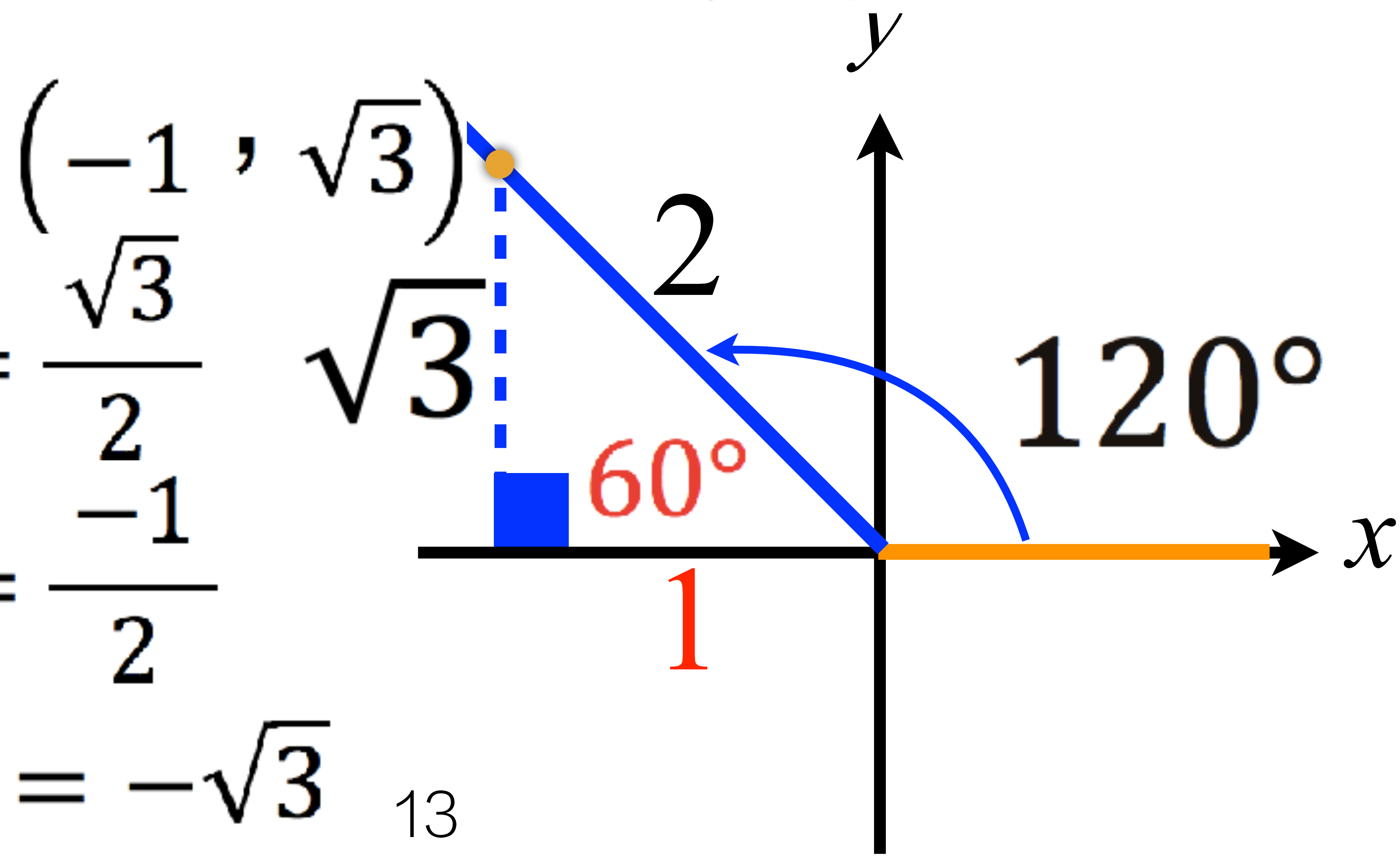
求 120° 和 $-240°$ 的 sin，cos 和 tan 值.

$120°$和 $-240°$為同界角

$$\sin(-240°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-240°)=\frac{-1}{2}$$

$$\tan(-240°)=-\sqrt{3}$$



課本P20練習

練習

求下列各 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 值:

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
135°			
300°			
-150°			

課本P20練習

練習

求下列各 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 值:

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
135°			
300°			
-150°			

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
-150°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

廣義角三角函數

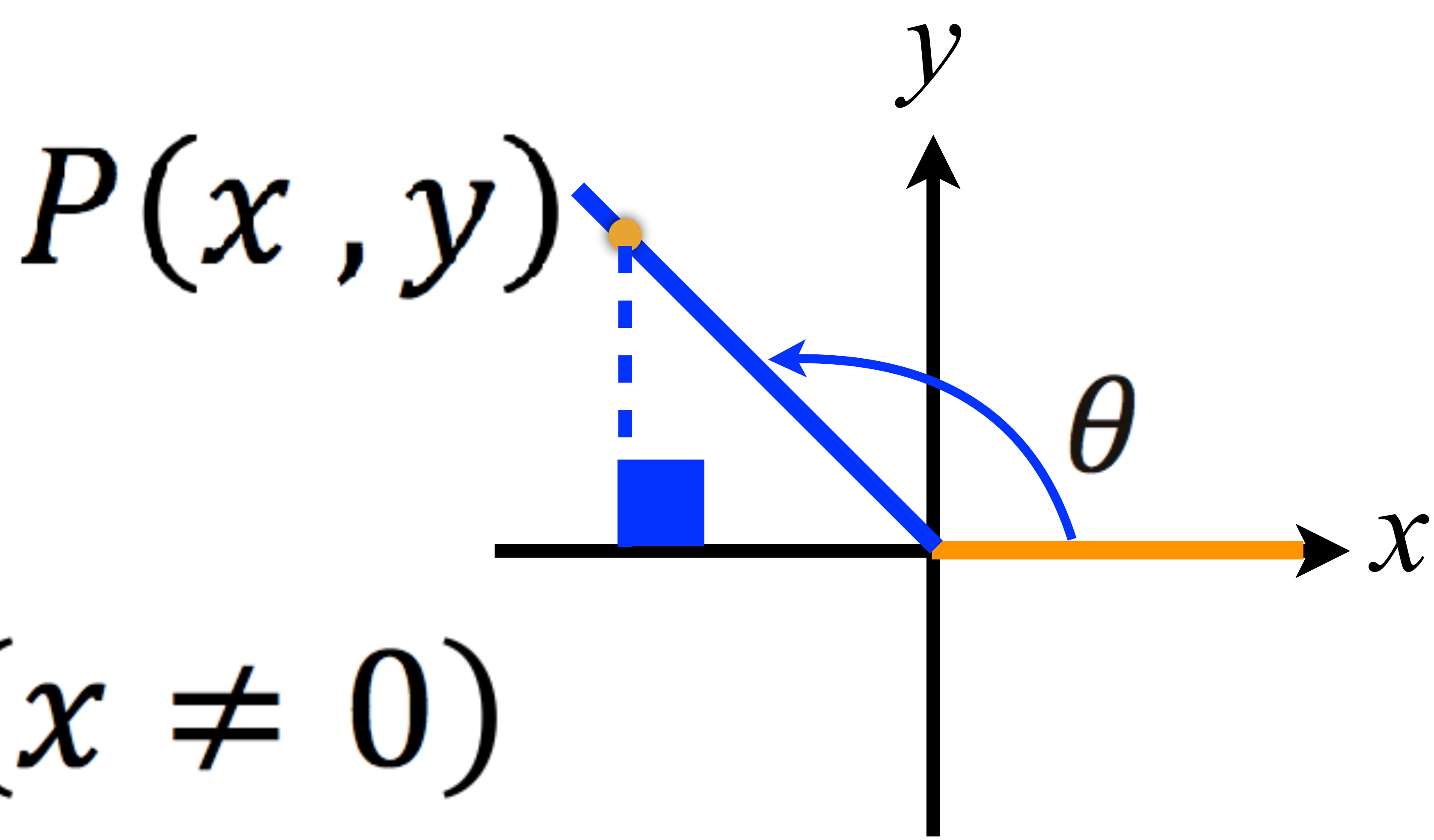
設 θ 為標準位置角

終邊上一點P => $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2} = r \neq 0$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \ (x \neq 0)$$



三角函數值正負

	$(x，y)$	$sin\theta$	$cos\theta$	$tan\theta$

三角函數值正負

	$(x，y)$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

三角函數值正負

	$(x，y)$	$sin\theta$	$cos\theta$	$tan\theta$
第一象限	$(+，+)$	$+$	$+$	$+$
第二象限	$(-，+)$	$+$	$-$	$-$
第三象限	$(-，-)$	$-$	$-$	$+$
第四象限	$(+，-)$	$-$	$+$	$-$

$$sin\theta = \frac{y}{r} \quad cos\theta = \frac{x}{r} \quad tan\theta = \frac{y}{x}$$

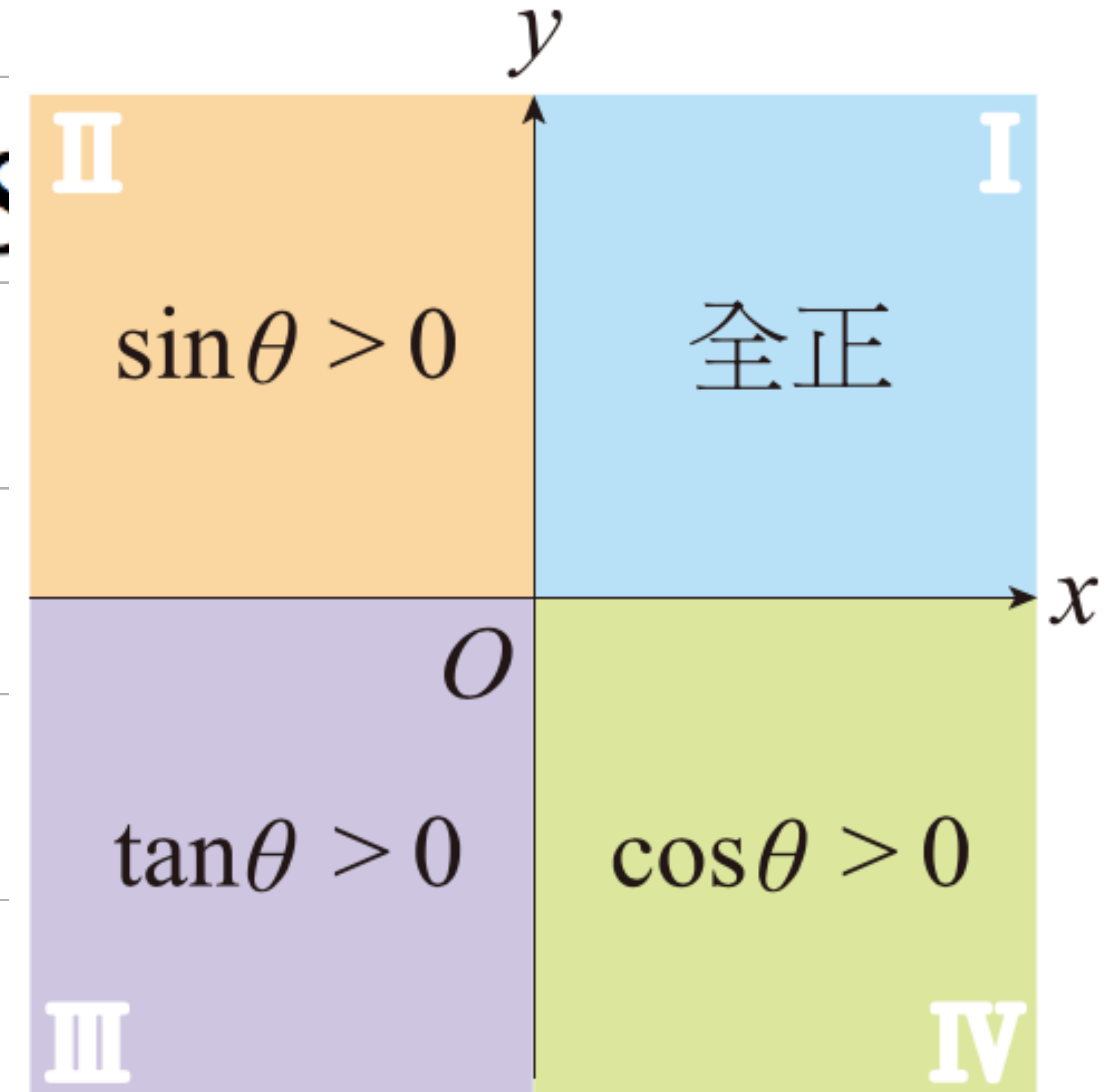
三角函數值正負

	$(x，y)$	$sin\theta$	$cos\theta$	$tan\theta$
第一象限	$(+，+)$	$+$	$+$	$+$
第二象限	$(-，+)$	$+$	$-$	$-$
第三象限	$(-，-)$	$-$	$-$	$+$
第四象限	$(+，-)$	$-$	$+$	$-$

$$sin\theta = \frac{y}{r} \quad cos\theta = \frac{x}{r} \quad tan\theta = \frac{y}{x}$$

三角函數值正負

	$(x，y)$
第一象限	$(+，+)$
第二象限	$(-，+)$
第三象限	$(-，-)$
第四象限	$(+，-)$



$$\sin\theta=\frac{y}{r}\quad\cos\theta=\frac{x}{r}\quad\tan\theta=\frac{y}{x}$$

課本P21練習

練習

求下列象限角的 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 值:

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°			
90°	1	0	×
180°			
270°			

×表示沒有定義

課本P21練習

練習

求下列象限角的 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 值：

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°			
90°	1	0	×
180°			
270°			

×表示沒有定義

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0	1	0
90°	1	0	×
180°	0	-1	0
270°	-1	0	×

課本P21練習

練習

根據下列各條件，分別指出各 θ 角是第幾象限角？

(1) $\sin\theta < 0$ 且 $\cos\theta > 0$.

(2) $\tan\theta > 0$ 且 $\cos\theta < 0$.

課本P21練習

練習

根據下列各條件，分別指出各 θ 角是第幾象限角？

(1) $\sin\theta < 0$ 且 $\cos\theta > 0$.

(2) $\tan\theta > 0$ 且 $\cos\theta < 0$.

Ans：(1)第四象限角

(2)第三象限角

課本P22例題4

例題 4

已知$\cos\theta=\dfrac{5}{13}$且θ是第四象限角，求$\sin\theta$和$\tan\theta$的值.

課本P22例題4

例題 4

已知$\cos\theta = \frac{5}{13}$且$\theta$是第四象限角，求$\sin\theta$和$\tan\theta$的值.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

θ**為第四象限角** $\Rightarrow \sin\theta < 0$

$$\sin\theta = -\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}$$

課本P22練習

練習

已知 $\sin\theta = -\dfrac{1}{3}$ 且 θ 是第三象限角，求 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 的值.

課本P22練習

練習

已知 $\sin\theta = -\frac{1}{3}$ 且 θ 是第三象限角，求 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 的值.

$$\cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ch1-1習作3

3. 有一直角三角形，斜邊長為 1，一內角 20°，下列何者等於斜邊上的高長？

(1) $\sin 20^\circ \cos 20^\circ$

(2) $\sin^2 20^\circ$

(3) $\cos^2 20^\circ$

(4) $\sin 20^\circ \tan 20^\circ$

(5) $\cos 20^\circ \tan 20^\circ$.

Ch1-1習作3

3. 有一直角三角形，斜邊長為 1，一內角 $20°$，下列何者等於斜邊上的高長？

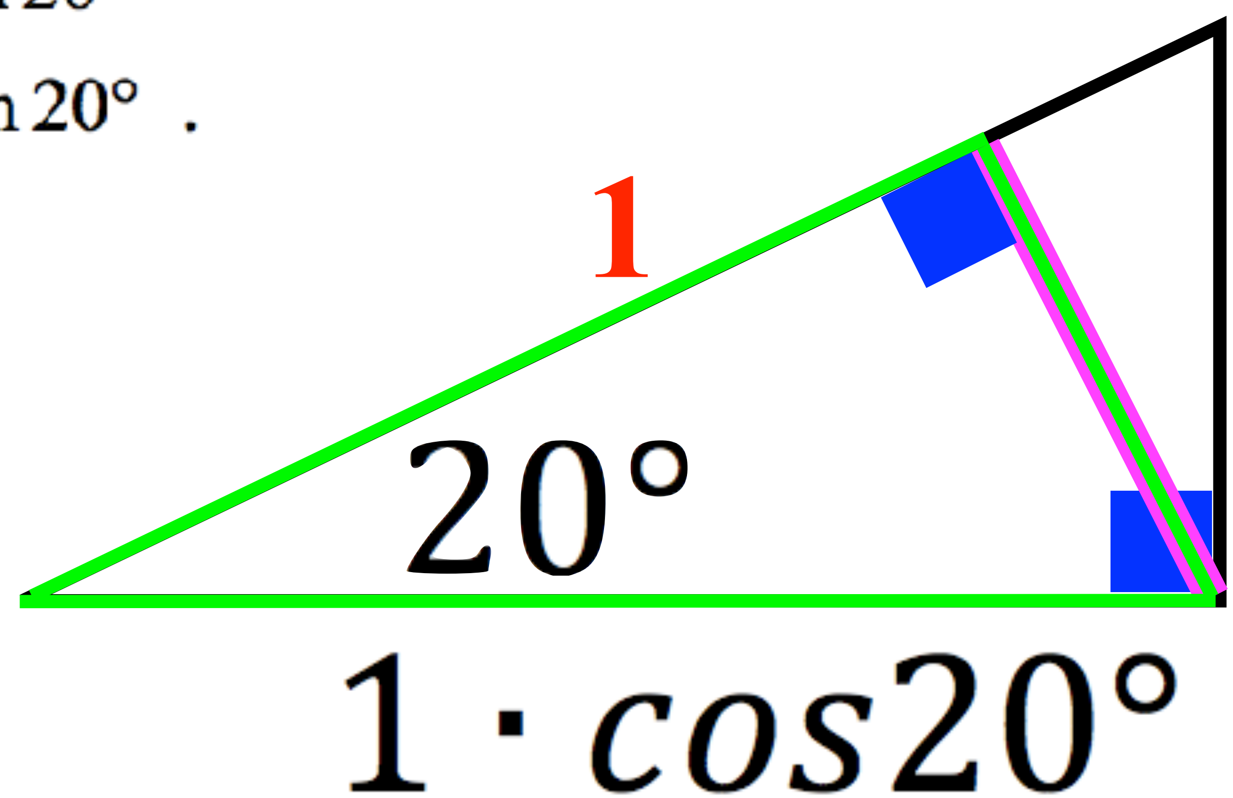
(1) $\sin 20° \cos 20°$

(2) $\sin^2 20°$

(3) $\cos^2 20°$

(4) $\sin 20° \tan 20°$

(5) $\cos 20° \tan 20°$.



Ch1-1習作3

3. 有一直角三角形，斜邊長為 1，一內角 20°，下列何者等於斜邊上的高長？

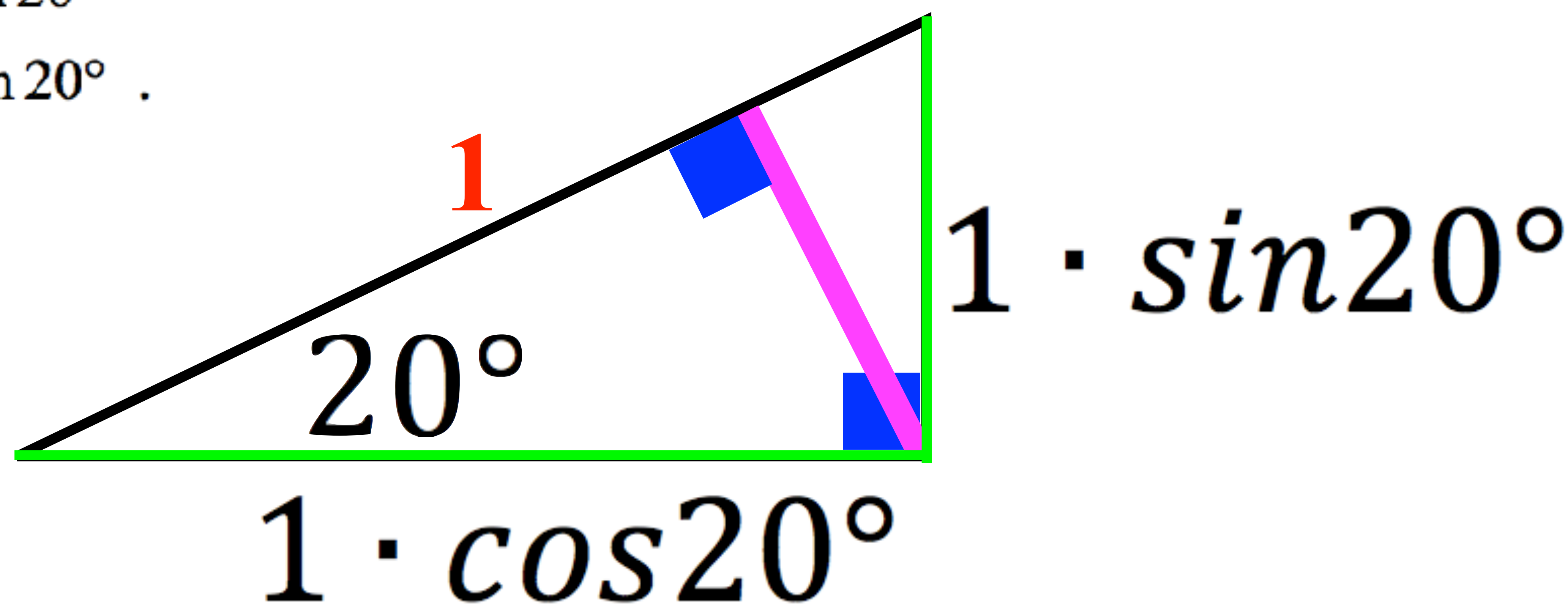
(1) $\sin 20^\circ \cos 20^\circ$

(2) $\sin^2 20^\circ$

(3) $\cos^2 20^\circ$

(4) $\sin 20^\circ \tan 20^\circ$

(5) $\cos 20^\circ \tan 20^\circ$.



Ch1-1習作10

10. 試證：$\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}-\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{4}{\tan\theta\sin\theta}$.

Ch1-1習作10

10. 試證：$\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}-\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{4}{\tan\theta\sin\theta}$．

$$左=\frac{1+cos\theta}{1-cos\theta}-\frac{1-cos\theta}{1+cos\theta}$$

$$=\frac{(1+cos\theta)^2-(1-cos\theta)^2}{(1-cos\theta)(1+cos\theta)}$$

$$=\frac{4cos\theta}{1-cos^2\theta}=\frac{4cos\theta}{sin^2\theta}$$

Ch1-1習作10

10. 試證：$\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}-\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{4}{\tan\theta\sin\theta}$.

$$右=\frac{4}{tan\theta sin\theta}=\frac{4}{\dfrac{sin\theta}{cos\theta}\times sin\theta}$$

$$=\frac{4cos\theta}{sin^2\theta}$$

三角函數換算公式

轉換公式1

$$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$$

$$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$$

$$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(180° + \theta) = \tan\theta$$

$$\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(360° - \theta) = \cos\theta$$

$$\tan(360° - \theta) = -\tan\theta$$

轉換公式2

$$\sin(90° + \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(90° + \theta) = -\frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$$

$$\cos(270° - \theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(270° - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sin(270° + \theta) = -\cos\theta$$

$$\cos(270° + \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(270° + \theta) = -\frac{1}{\tan\theta}$$

課本P25例題5

例題 5

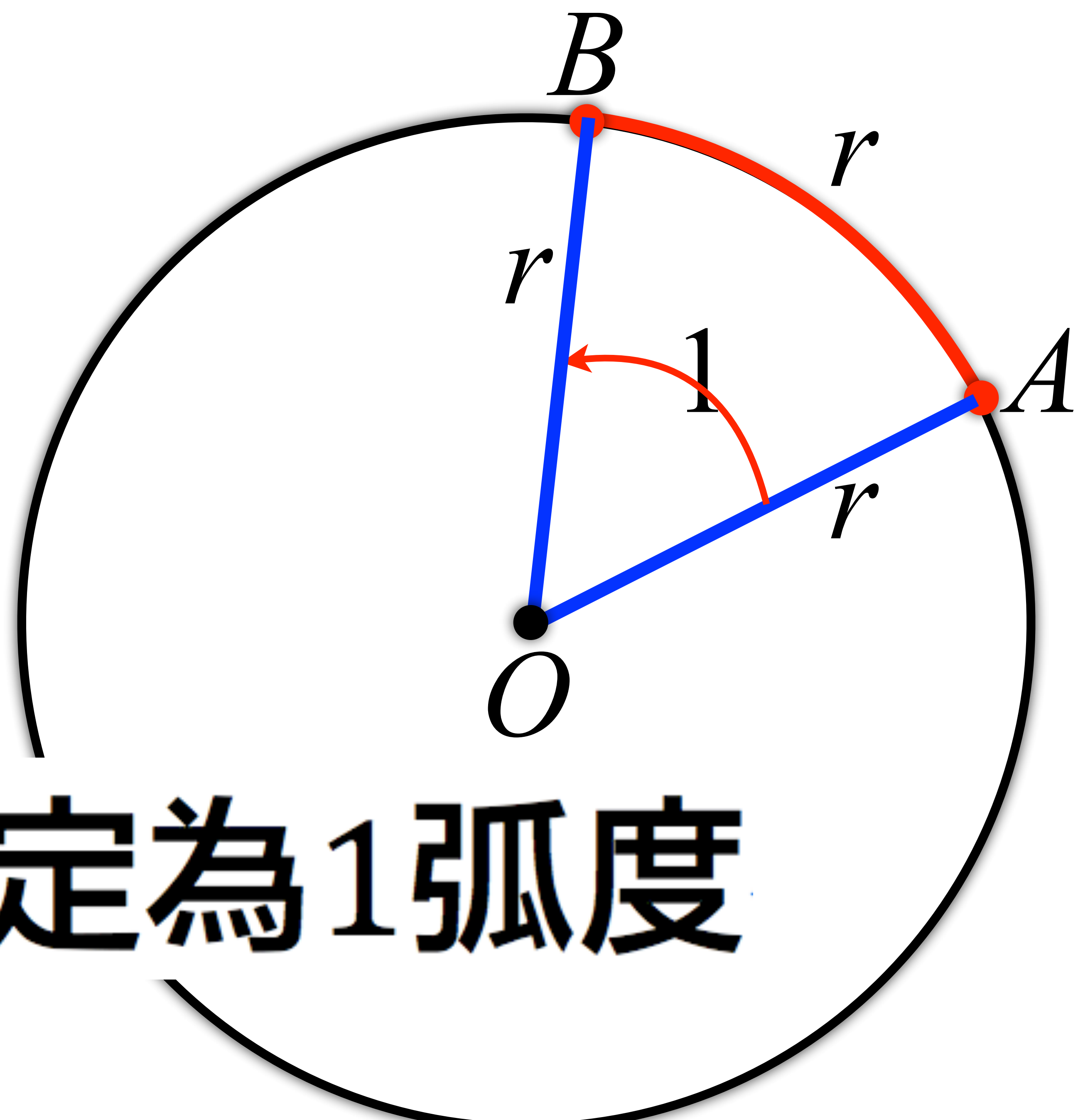
求下列各三角函數值：

(1) $\sin 150^\circ$．　(2) $\cos 210^\circ$．

(3) $\tan(-60^\circ)$．　(4) $\tan(-225^\circ)$．

角度度量單位

- 度
- 弧度

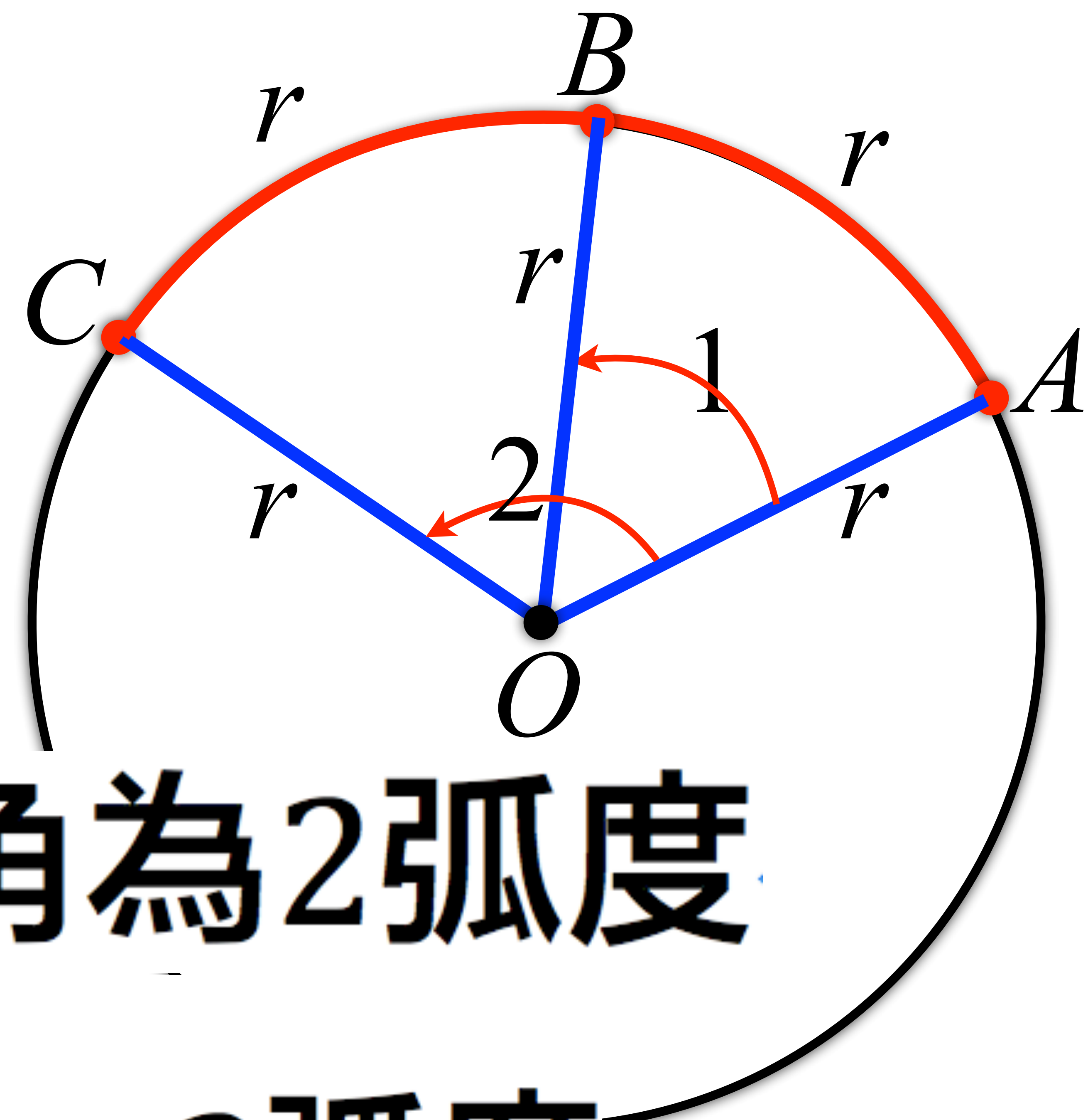


AB**弧長** $= r$

$\Rightarrow AB$**弧圓心角定為1弧度**

角度度量單位

- 度
- 弧度



$$AC\text{弧長} = 2r$$

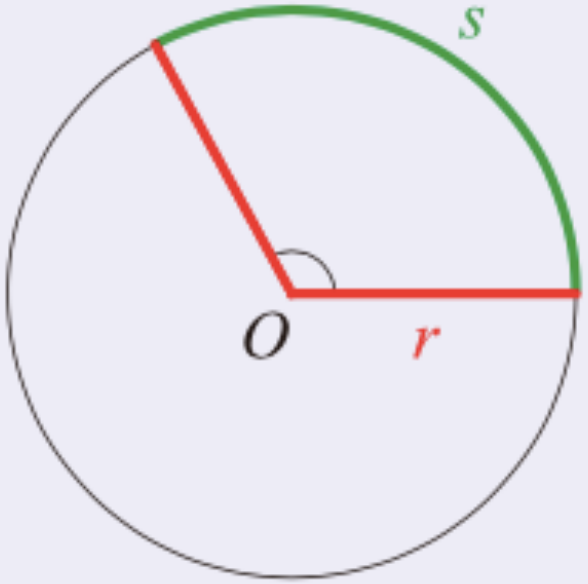
$$\Rightarrow AC\text{弧圓心角為}2\text{弧度}$$

$$\angle AOC = \frac{2r}{r} = 2\text{弧度}$$

弧度

弧長與弧度

弧長 s 的圓弧所對圓心角的弧度數 θ，就是弧長 s 與半徑 r 的比值 $\frac{s}{r}$，即 $\theta=\frac{s}{r}$. 此定義之弧度與半徑 r 無關.



$$\text{半圓弧長}=\pi r$$

$$\text{半圓圓心角}\theta=\frac{\pi r}{r}=\pi$$

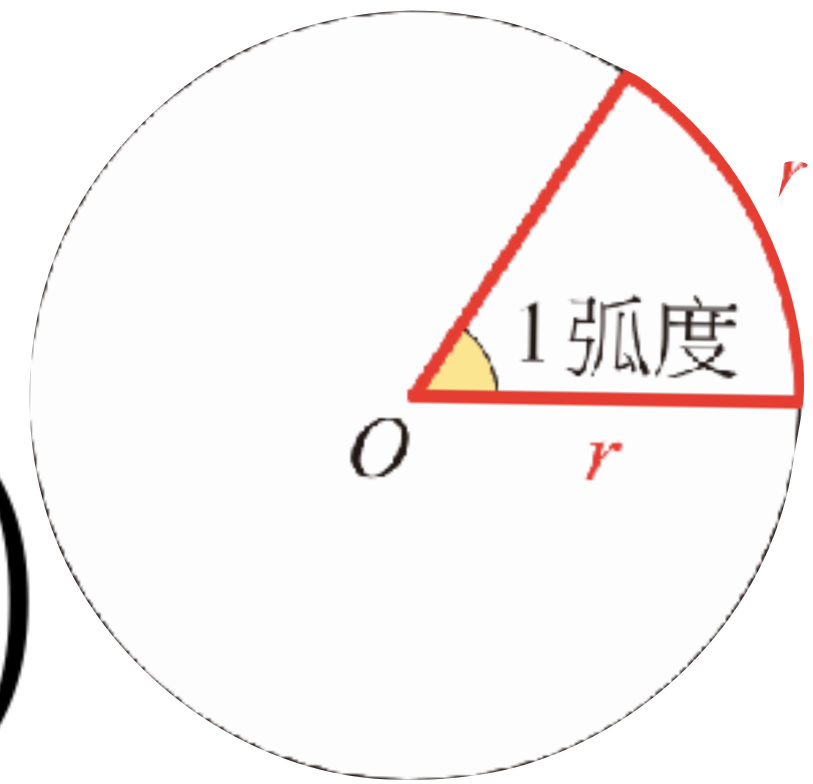
$$180^\circ=\pi\,(\text{弧度})$$

角度換算

$$180° = \pi\,(\text{弧度})$$

$$1° = \frac{\pi}{180}(\text{弧度})$$

$$1\text{弧度} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57.2958°$$



課本P28例題6

例題 6

(1) 將 60° 與 110° 化為弧度.

(2) $\dfrac{2\pi}{5}$ 弧度與 2 弧度分別等於多少度？

課本P28頁練習題

練習

下表是度與弧度的換算，請完成下表.

度	0°	30°	45°		90°	
弧度	0		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$
度	135°	150°			360°	
弧度			π	$\frac{3\pi}{2}$		

課本P28頁練習題

練習

下表是度與弧度的換算，請完成下表.

度	0°	30°	45°		90°	
弧度	0		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$
度	135°	150°			360°	
弧度			π	$\frac{3\pi}{2}$		

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

課本P29練習題

練習

問：(1) -1200° 是多少弧度？　(2) $\dfrac{50\pi}{3}$ 弧度是多少度？

課本P29練習題

練習

問：(1) -1200° 是多少弧度？ (2) $\dfrac{50\pi}{3}$ 弧度是多少度？

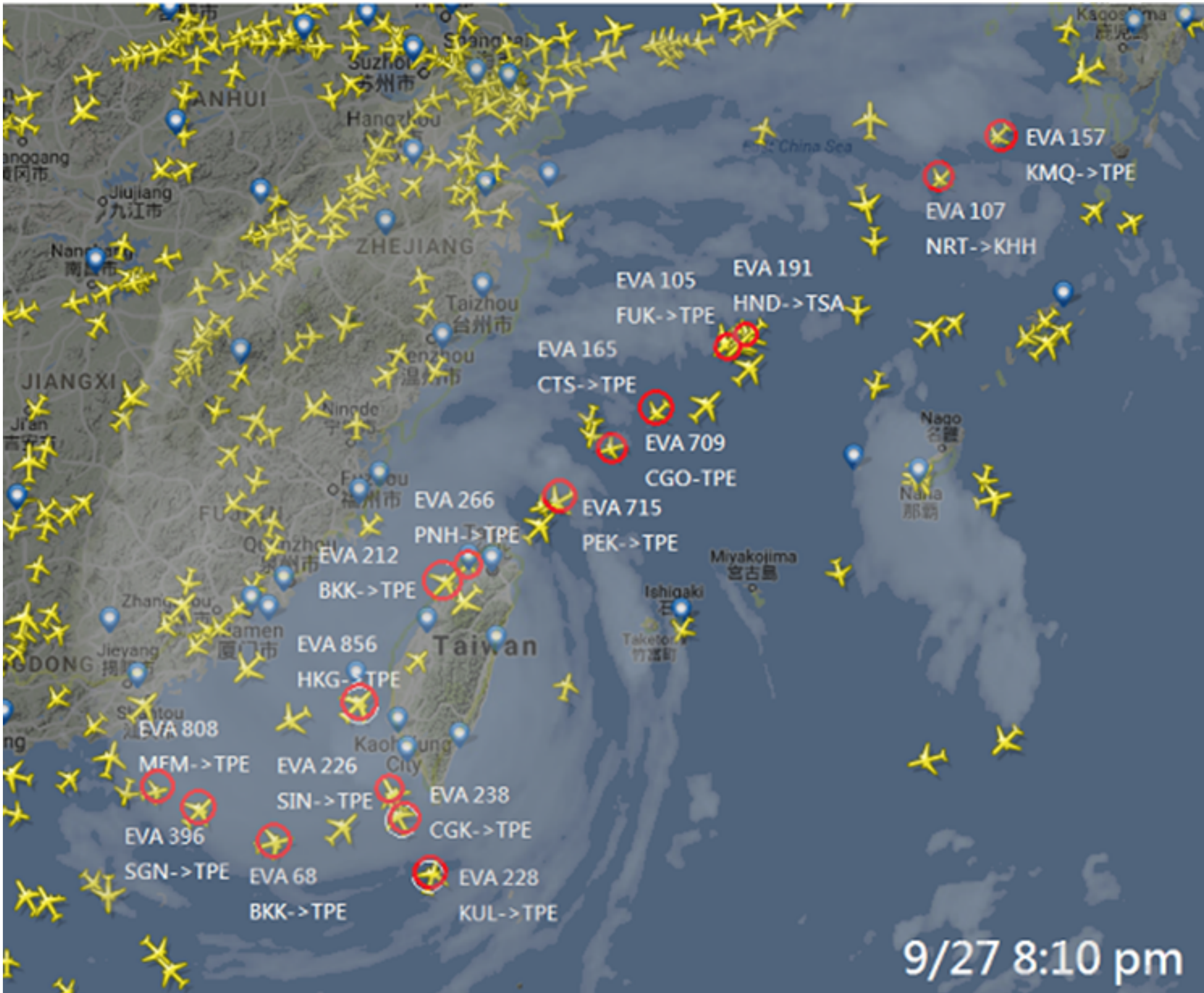
(1) $-\dfrac{20\pi}{3}$ 弧度. (2) 3000°.

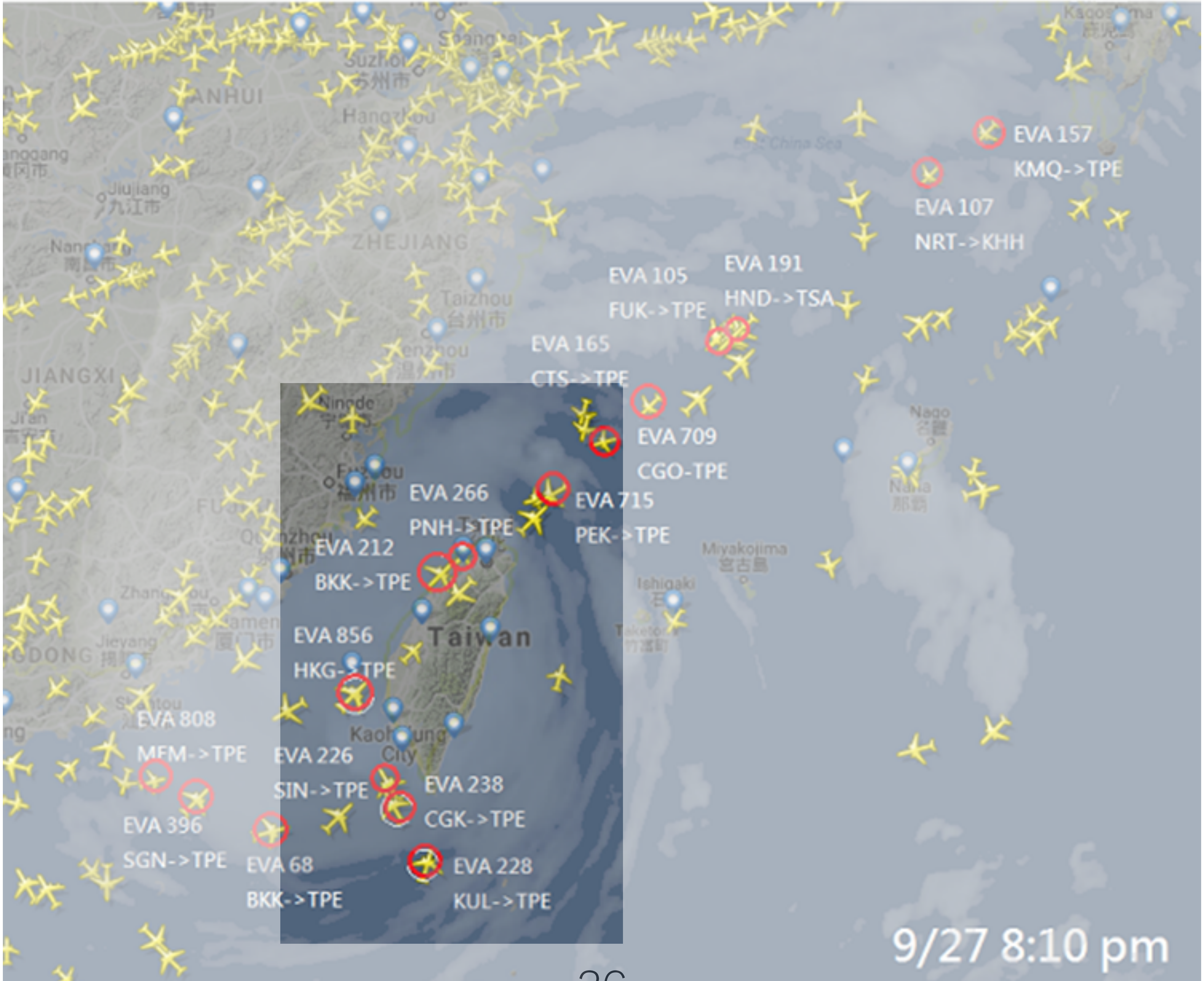
課本P29例題7

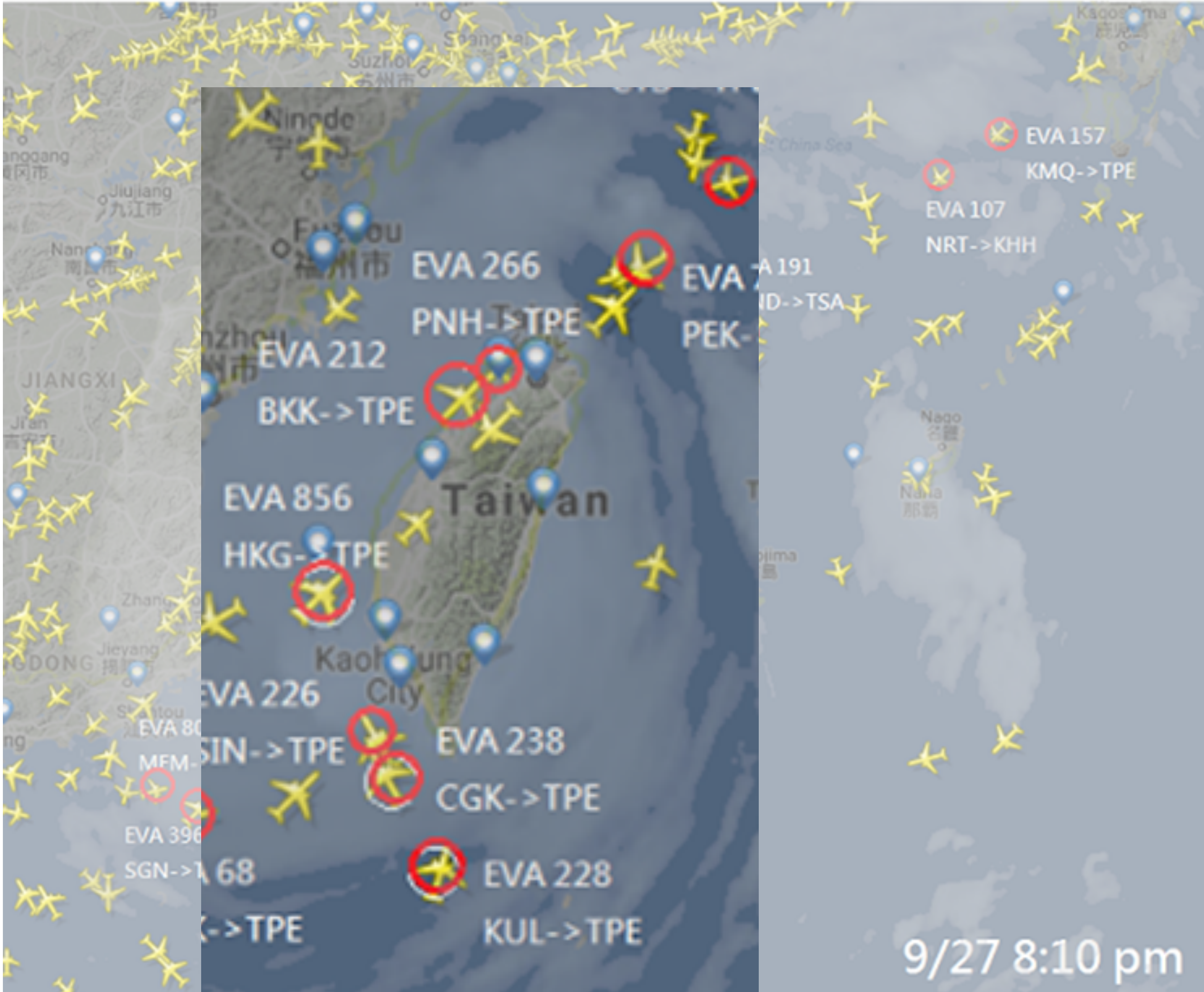
例題 7

求下列各式的值：

(1) $\sin\dfrac{\pi}{4}$.　(2) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.　(3) $\tan\dfrac{3\pi}{4}$.

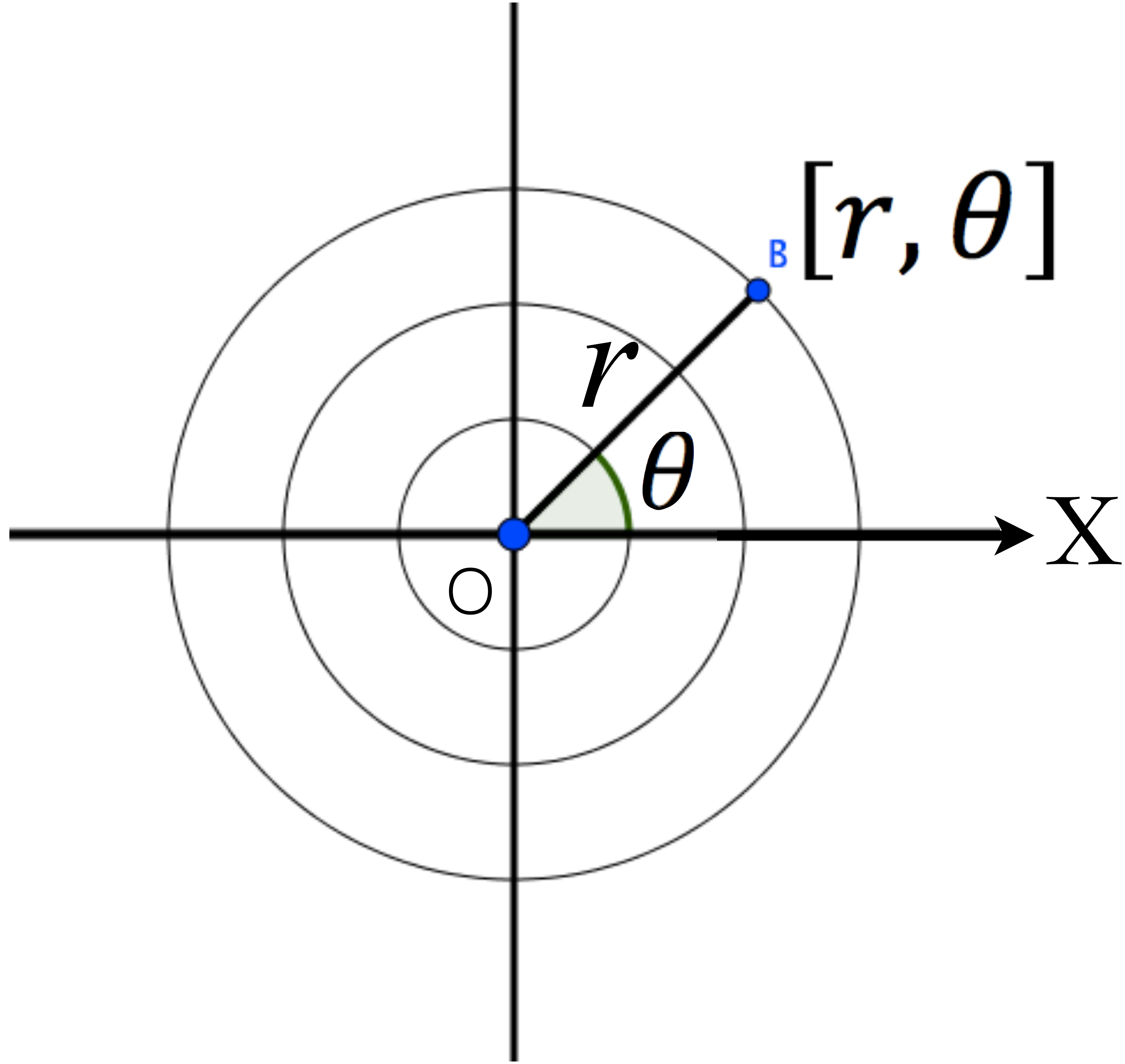

EVA 157
KMQ->TPE
EVA 107
NRT->KHH
EVA 105
FUK->TPE
EVA 191
HND->TSA
EVA 165
CTS->TPE
EVA 709
CGO-TPE
EVA 715
PEK->TPE
EVA 266
PNH->TPE
EVA 212
BKK->TPE
EVA 856
HKG->TPE
EVA 808
MFM->TPE
EVA 226
SIN->TPE
EVA 238
CGK->TPE
EVA 396
SGN->TPE
EVA 68
BKK->TPE
EVA 228
KUL->TPE
ANHUI
ZHEJIANG
JIANGXI
Taiwan
Shanghai
Hangzhou
Jiujiang
九江市
Taizhou
台州市
Wenzhou
温州市
Ningde
Miyakojima
宮古島
Ishigaki
Nago
Naha
那覇
Jieyang
Kaohsiung City
East China Sea
9/27 8:10 pm


EVA 157
KMQ->TPE
EVA 107
NRT->KHH
EVA 105
FUK->TPE
EVA 191
HND->TSA
EVA 165
CTS->TPE
EVA 709
CGO-TPE
EVA 715
PEK->TPE
EVA 266
PNH->TPE
EVA 212
BKK->TPE
EVA 856
HKG->TPE
EVA 808
MFM->TPE
EVA 226
SIN->TPE
EVA 238
CGK->TPE
EVA 396
SGN->TPE
EVA 68
BKK->TPE
EVA 228
KUL->TPE
Taiwan
9/27 8:10 pm

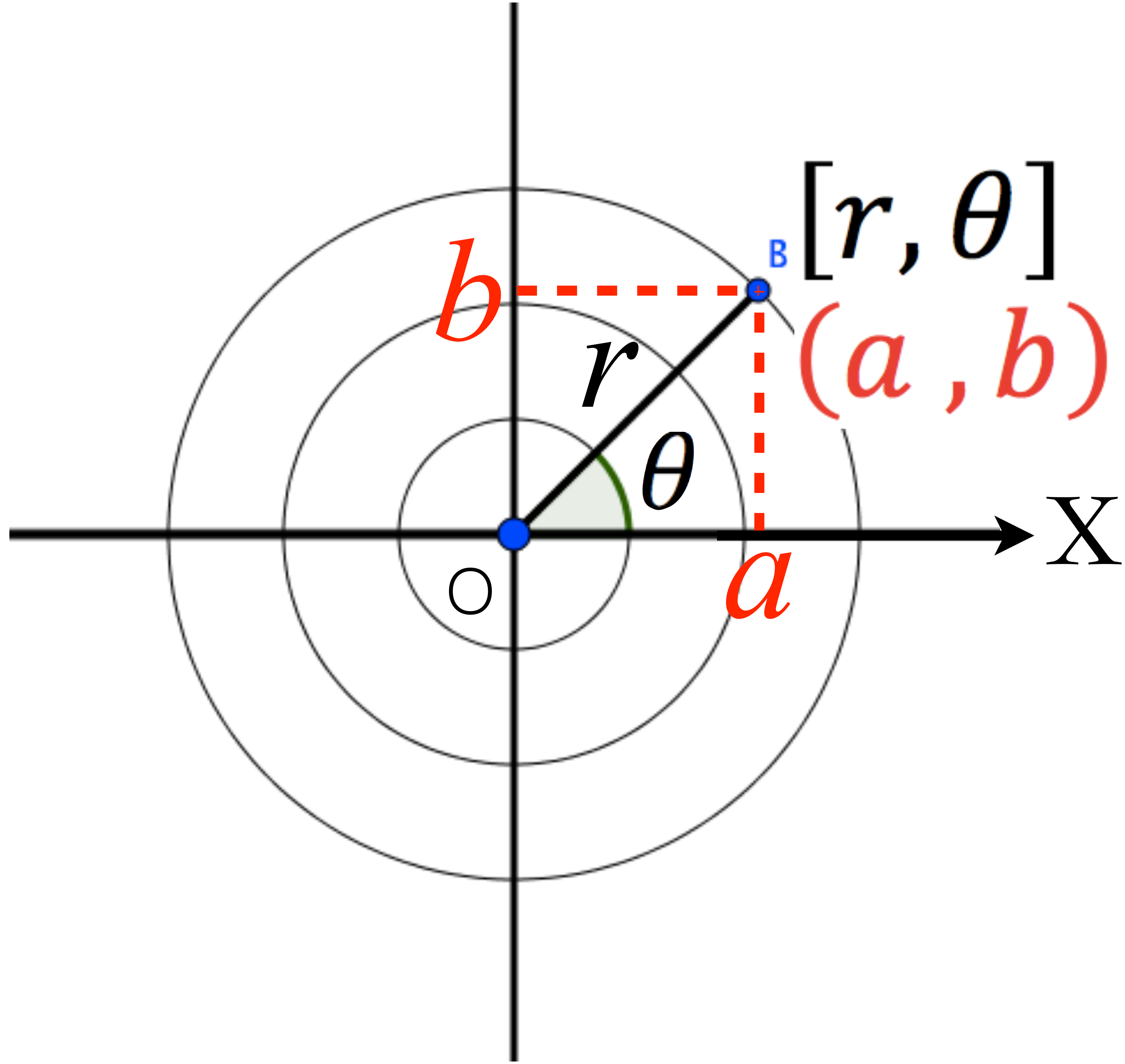


EVA 157
KMQ->TPE
EVA 107
NRT->KHH
EVA 266
PNH->TPE
EVA 212
BKK->TPE
EVA 856
HKG->TPE
EVA 226
SIN->TPE
EVA 238
CGK->TPE
EVA 228
KUL->TPE
Taiwan
9/27 8:10 pm

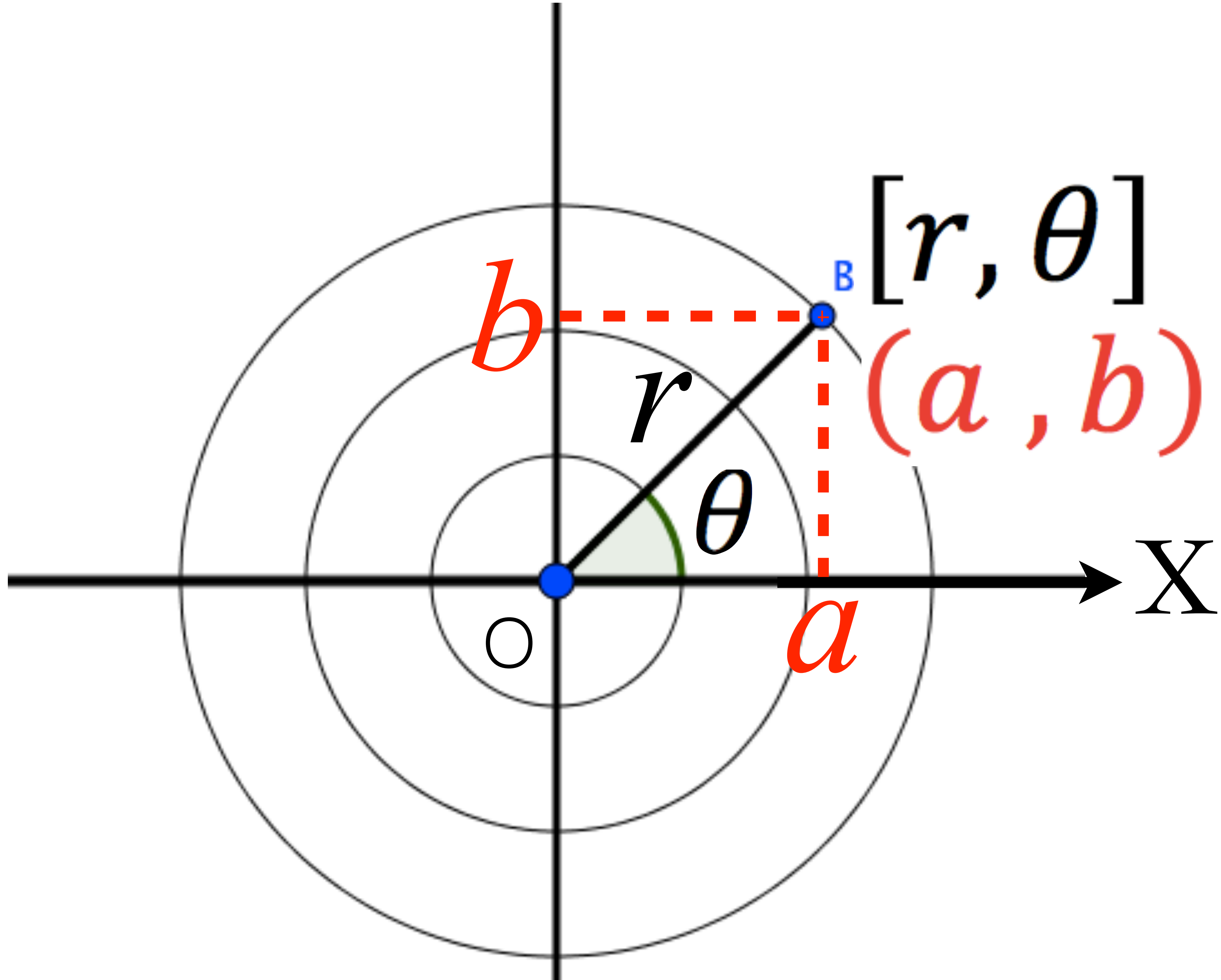
極坐標



極坐標



極坐標



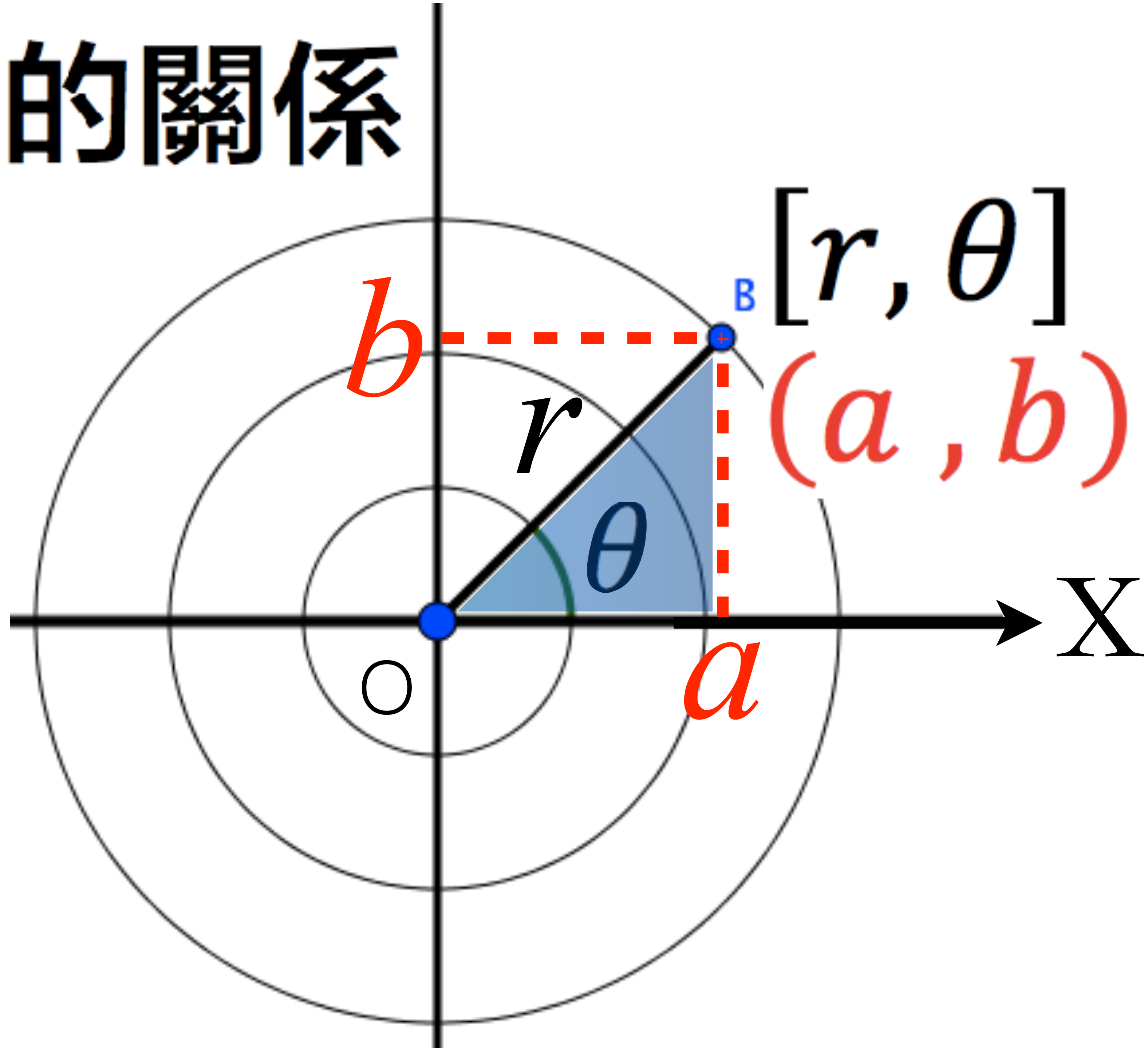
極坐標表示法唯一嗎？

極坐標

$[r,\theta]$與(a,b)的關係

$$a = r\cos\theta$$

$$b = r\sin\theta$$



極坐標表示法唯一嗎？

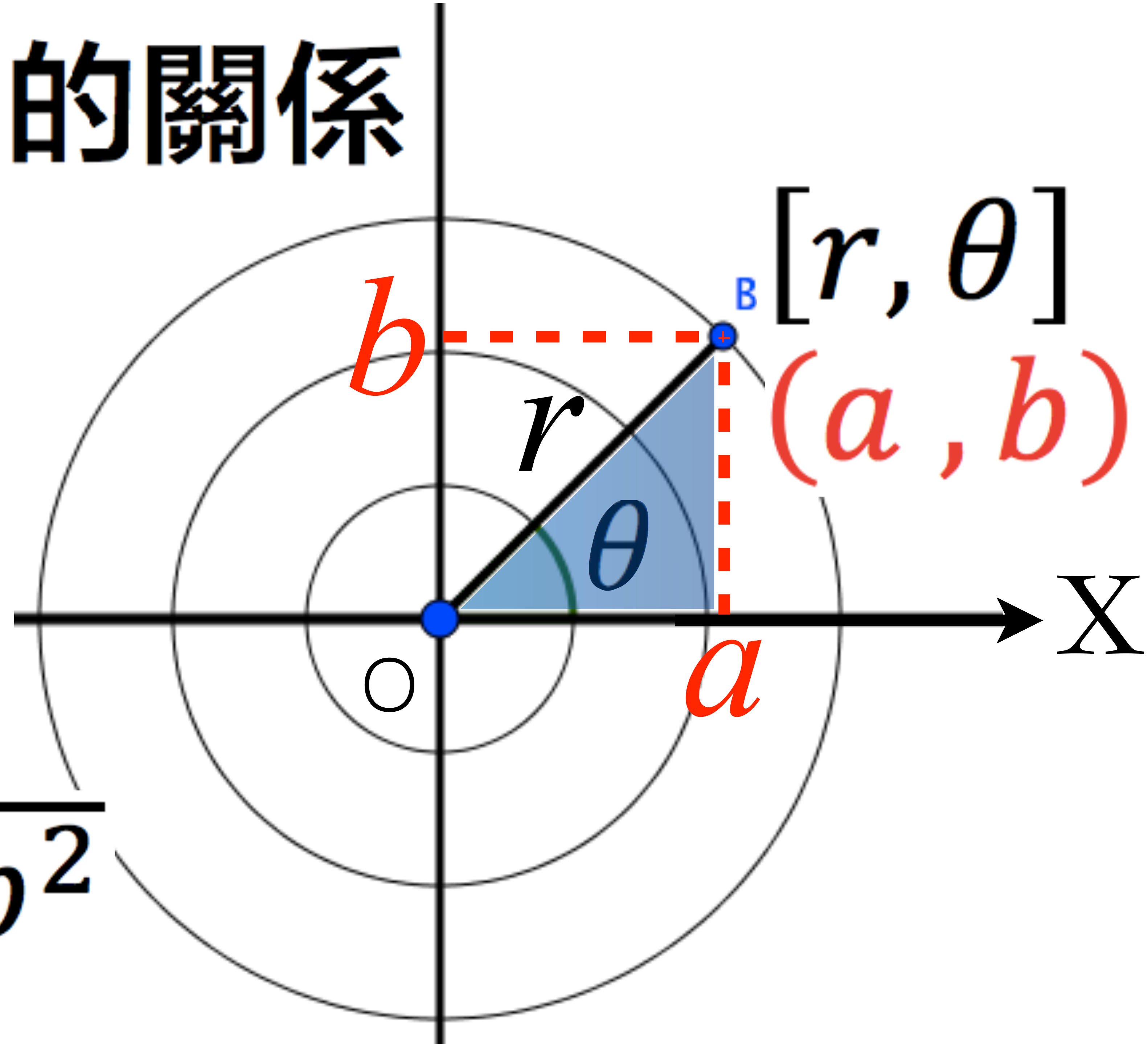
極坐標

$[r,\theta]$與(a,b)的關係

$$a = r\cos\theta$$

$$b = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

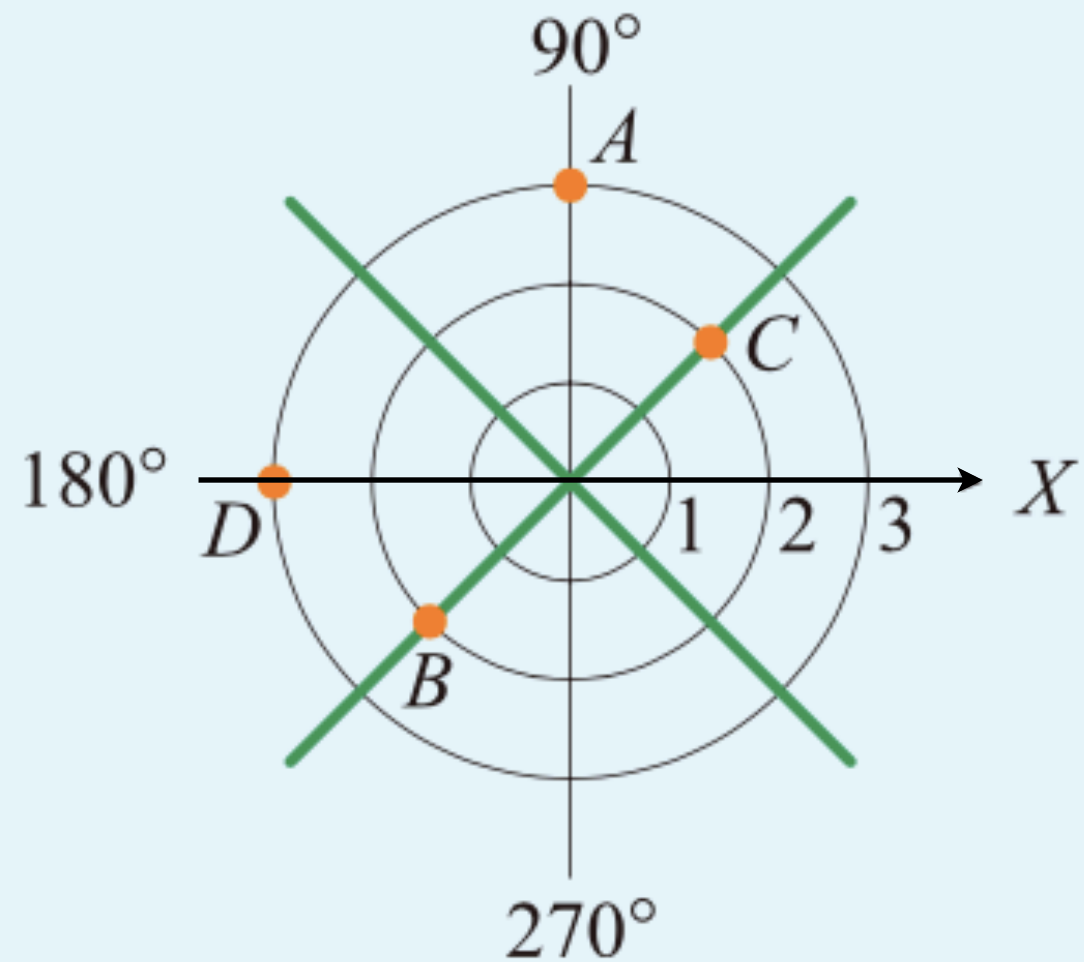


極坐標表示法唯一嗎？

課本P31例題8

例題 8

寫出下圖中 A，B 兩點的極坐標.



課本P32例題9

例題 9

(1) 已知點 P 的極坐標為 $[\,2\sqrt{2}, -45^\circ\,]$，求其直角坐標.

(2) 已知點 P 的直角坐標為 $(\,-2, -2\sqrt{3}\,)$，求其極坐標.

講義P20例題8

例題 8【常考題】

化簡：$\dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)}+\dfrac{\sin(90^\circ+\theta)}{\cos(360^\circ-\theta)}+\dfrac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(270^\circ-\theta)}$．

講義P20例題9

例題 9【常考題】

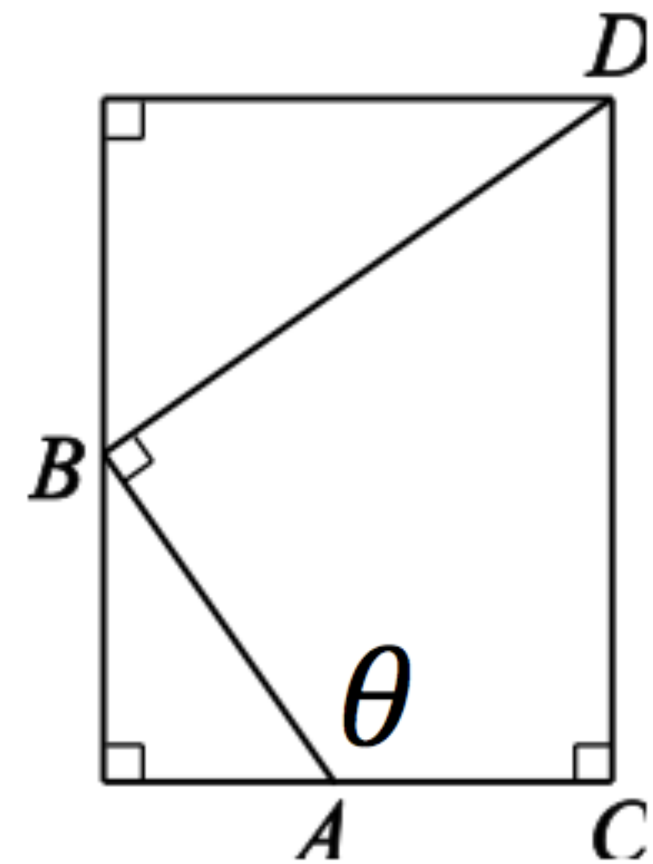
設 $\cos(-110°)=k$，試以 k 表示 $\tan 250°$ 的值．

你不問我，換我問你

如右圖 $\angle BAC=\theta$ ，$\angle ABD=\angle ACD=90^\circ$ ，$\overline{AB}=a$ ，$\overline{BD}=b$ ．下列選項何者可以表示 $\overline{CD}$ ？

(1) $a\sin\theta+b\cos\theta$ ．　(2) $a\sin\theta-b\cos\theta$ ．　(3) $a\cos\theta-b\sin\theta$ ．

(4) $a\cos\theta+b\sin\theta$ ．　(5) $a\sin\theta+b\tan\theta$ ．



你不問我，換我問你

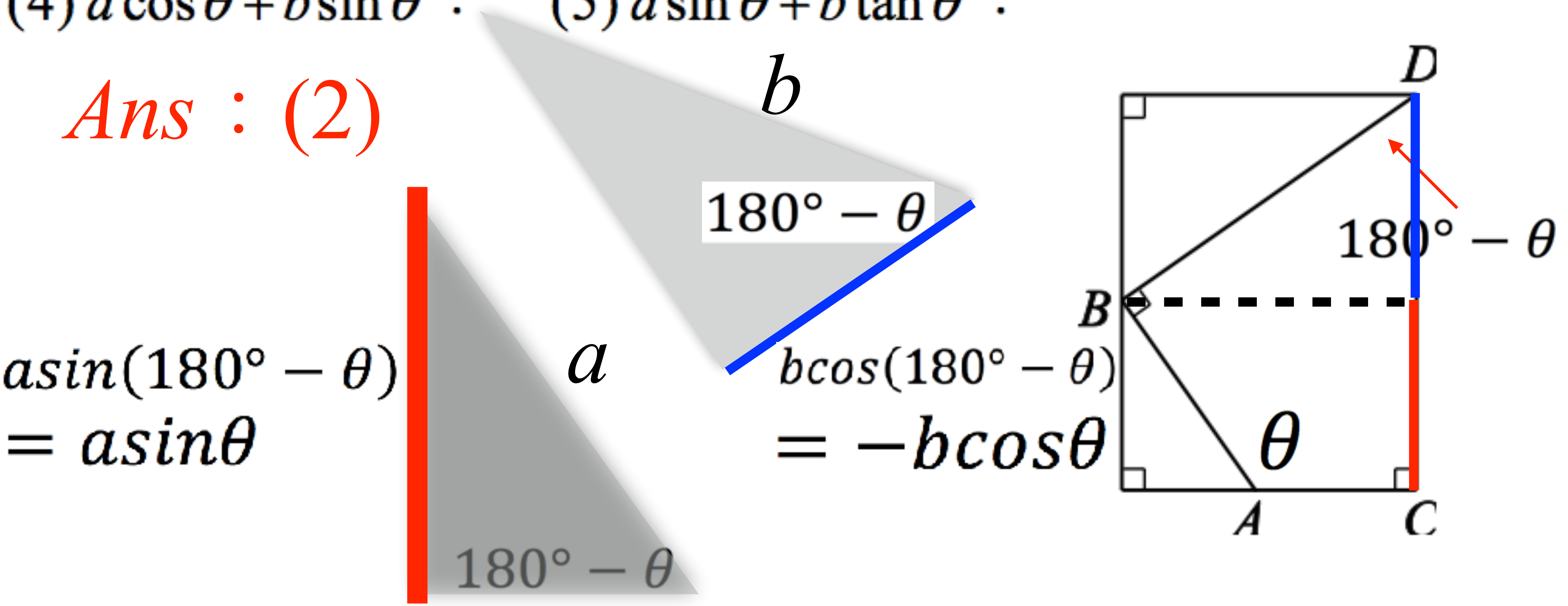
如右圖 $\angle BAC=\theta$ ，$\angle ABD=\angle ACD=90^\circ$ ，$\overline{AB}=a$ ，$\overline{BD}=b$ ．

下列選項何者可以表示 $\overline{CD}$ ？

(1) $a\sin\theta+b\cos\theta$ ．　(2) $a\sin\theta-b\cos\theta$ ．　(3) $a\cos\theta-b\sin\theta$ ．

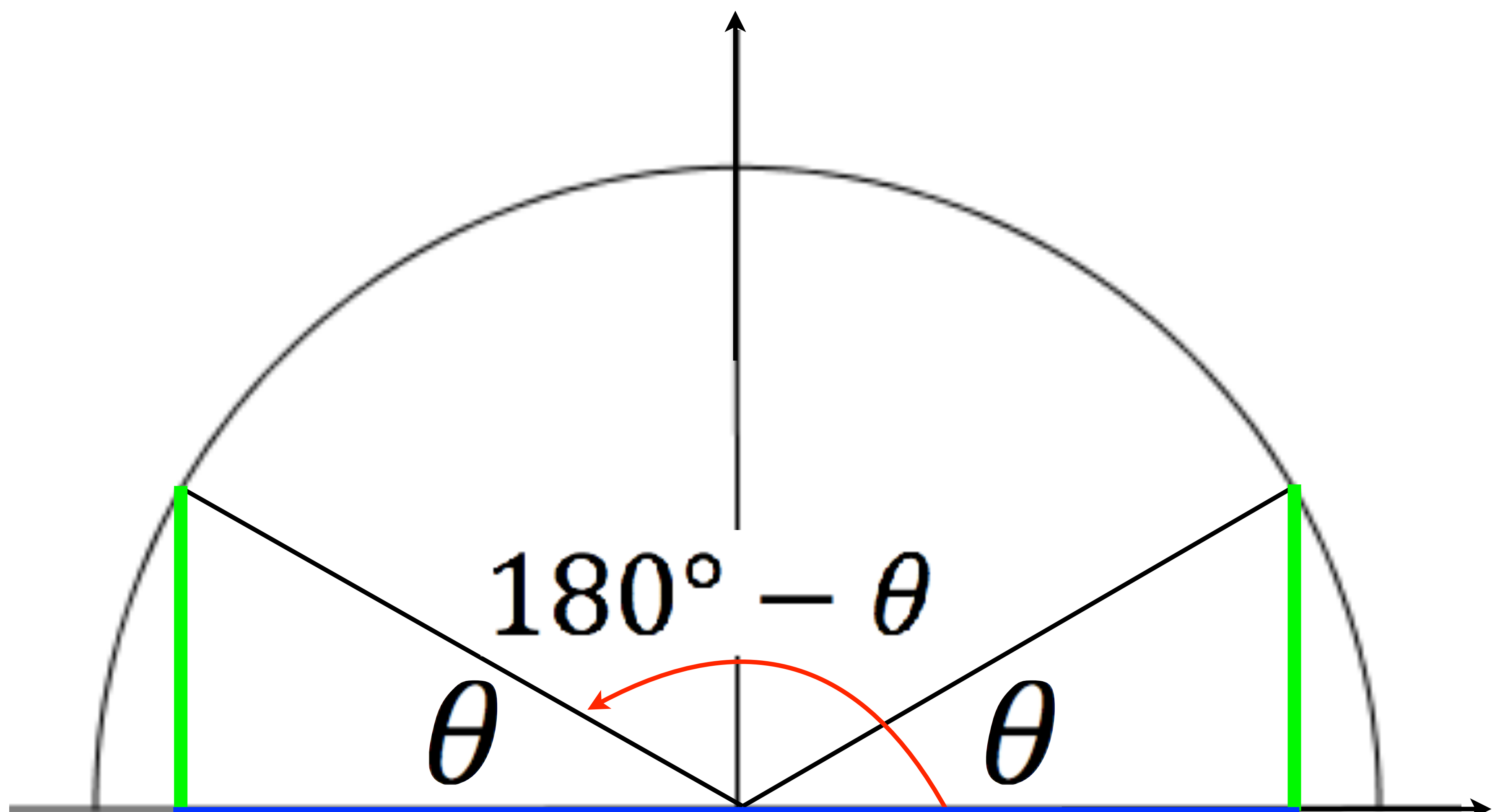
(4) $a\cos\theta+b\sin\theta$ ．　(5) $a\sin\theta+b\tan\theta$ ．

Ans：(2)



你不問我，換我問你

求 $\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + \cdots + \cos 180°$ 的值



$$cos(180° - \theta) = -cos\theta$$

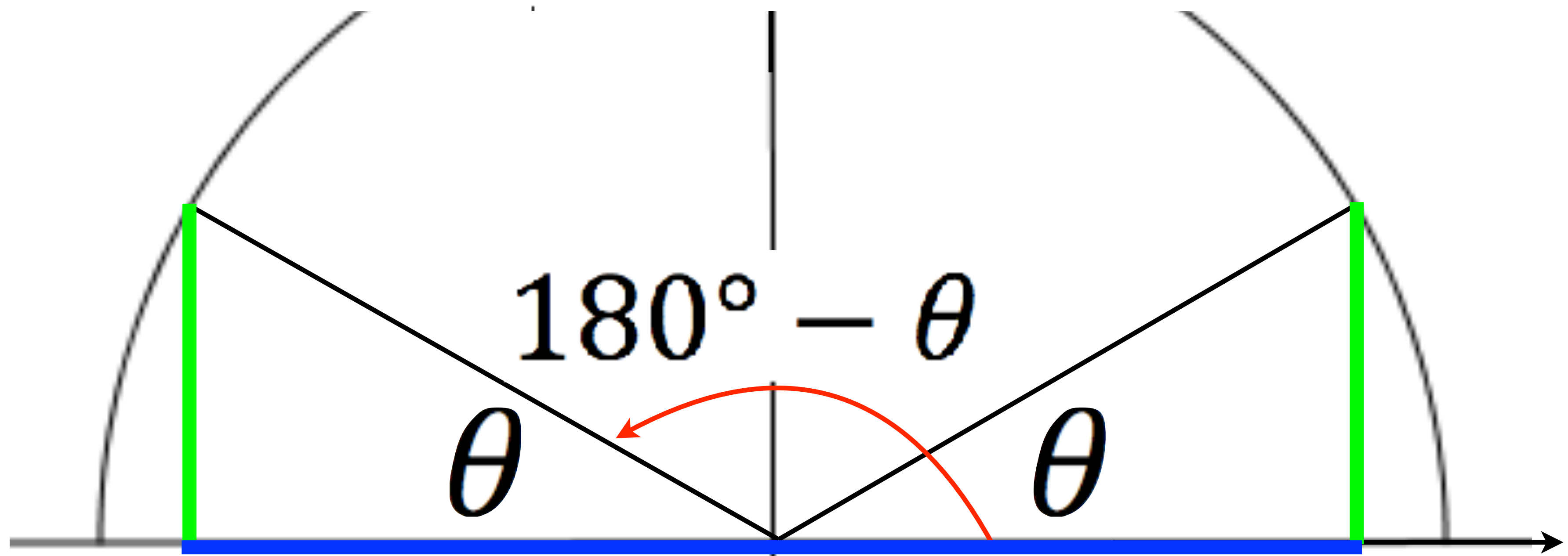
你不問我，換我問你

求 $\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + \cdots + \cos 180°$ 的值

$$cos179° = cos(180° - 1°) = -cos1°$$

$$cos178° = cos(180° - 2°) = -cos2°$$

$$cos177° = cos(180° - 3°) = -cos3°$$



$$cos(180° - \theta) = -cos\theta$$

你不問我，換我問你

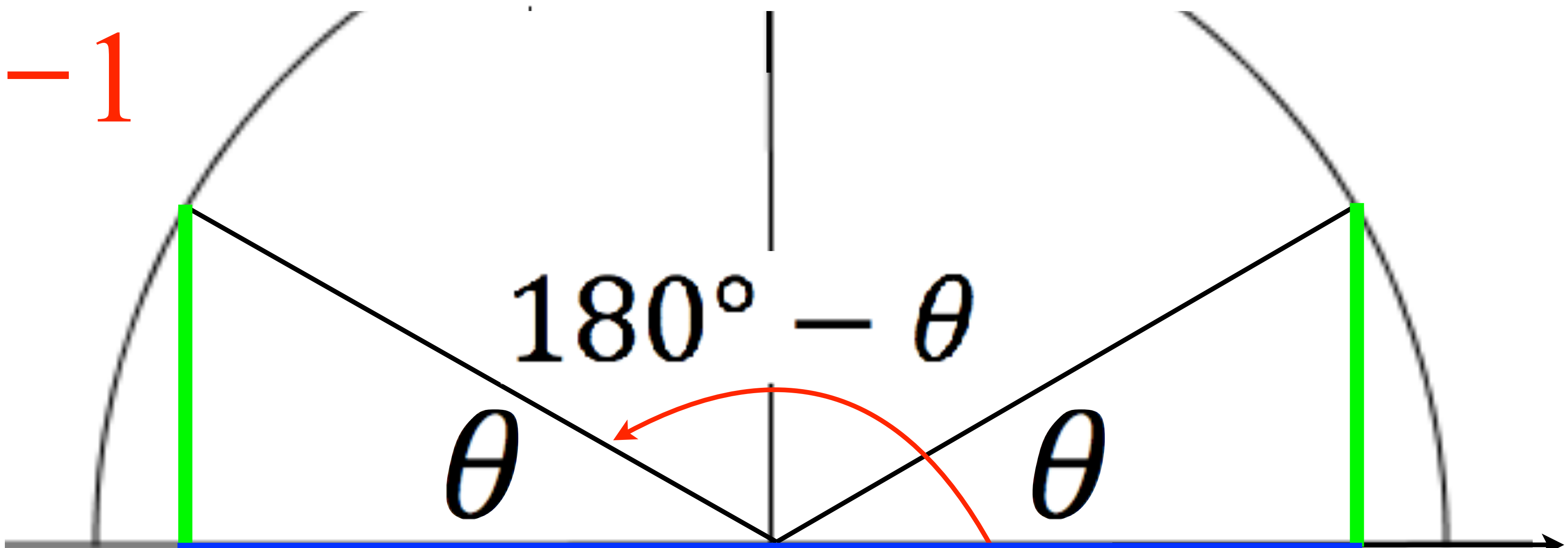
求 $\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + \cdots + \cos 180°$ 的值

$$cos179° = cos(180° - 1°) = -cos1°$$

$$cos178° = cos(180° - 2°) = -cos2°$$

$$cos177° = cos(180° - 3°) = -cos3°$$

$Ans：-1$



$$cos(180° - \theta) = -cos\theta$$

你不問我，換我問你

若 $0° \le \theta \le 180°$ 且 $\sin 2011° = \cos\theta$ ，求 $\theta =$ ____________ .

你不問我，換我問你

若 $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ 且 $\sin 2011^\circ = \cos\theta$ ，求 $\theta =$ ______________ ．

Ans ：121°

The End