課本P48

Ch1-4 差角公式

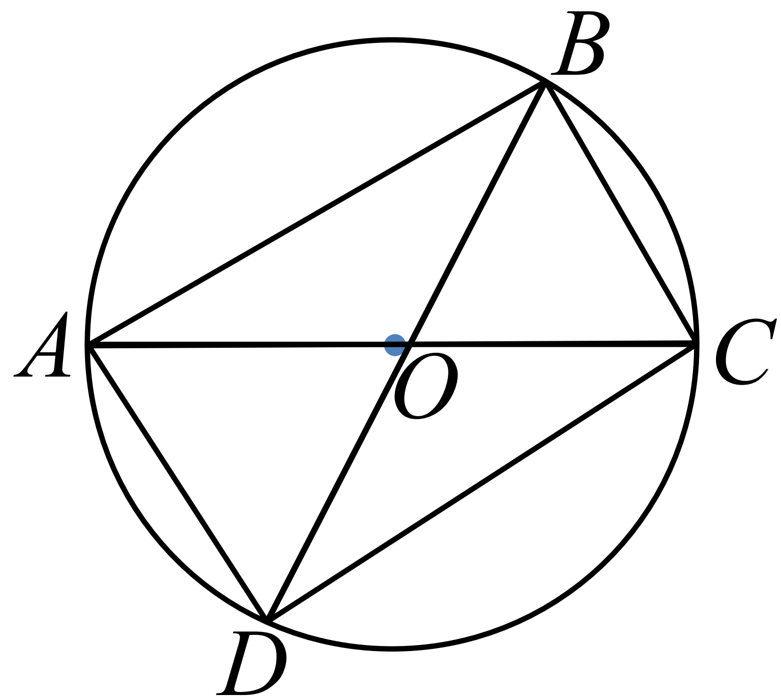
和差角公式

除了正餘弦定理外，和差
是三角學中最重要的定理

西元二世紀的托勒密在其《天文學大成》中，說明如何利用正餘弦函數的和差角公式，來製作三角函數值表。

托勒密定理

四邊形$ABCD$為圓內接四邊形。

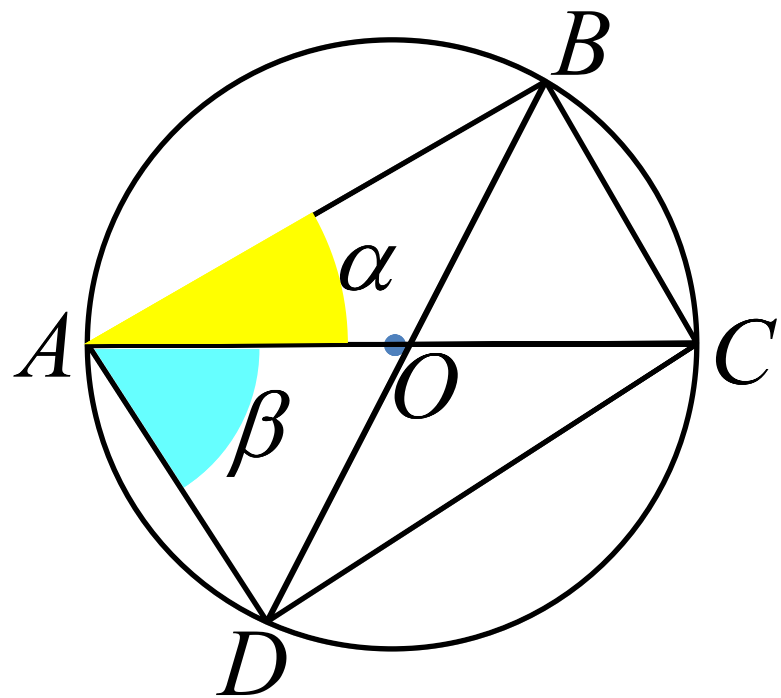


$$\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{AD} \times \overline{BC}$$

sin和角公式

做一個圓，圓心O，
直徑為1。

四邊形$ABCD$為圓內接四邊形。



令對角線AC為直徑

$$\therefore \overline{AB} = \cos\alpha \qquad \overline{AD} = \cos\beta$$

$$\overline{BC} = \sin\alpha \qquad \overline{CD} = \sin\beta$$

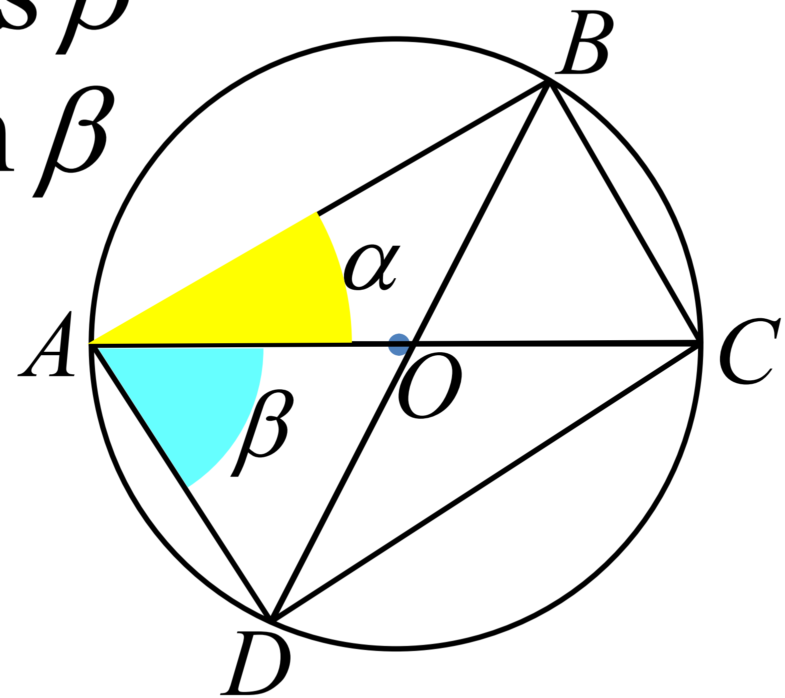
sin和角公式

$\overline{AB} = \cos\alpha \quad \overline{AD} = \cos\beta$

$\overline{BC} = \sin\alpha \quad \overline{CD} = \sin\beta$

ΔABD 中

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\alpha+\beta)} = 1$$



$$\therefore \sin(\alpha+\beta) = \overline{BD} = \overline{BD} \times \overline{AC}$$

sin和角公式

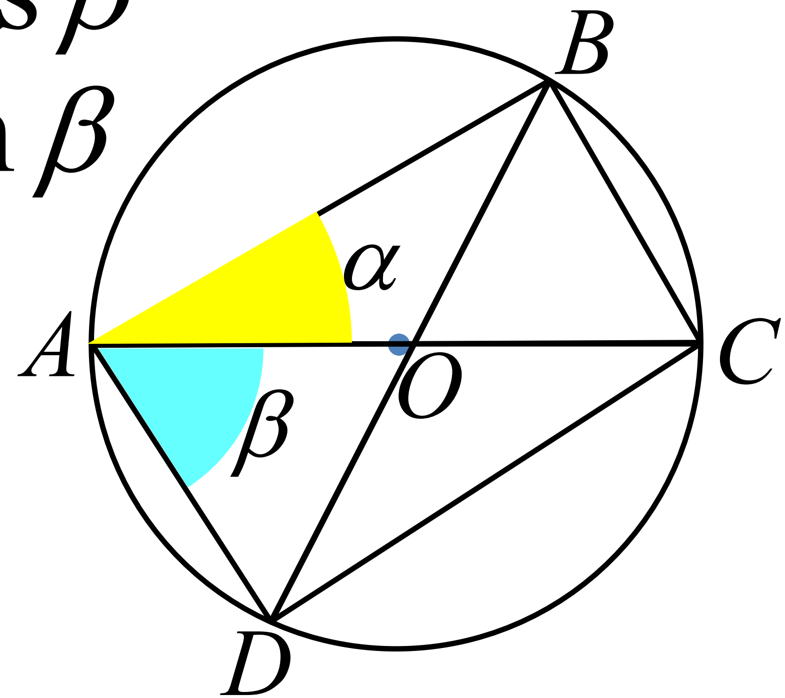
$\overline{AB}=\cos\alpha$ $\overline{AD}=\cos\beta$

$\overline{BC}=\sin\alpha$ $\overline{CD}=\sin\beta$

ΔABD中 $\dfrac{\overline{BD}}{\sin(\alpha+\beta)}=1$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\overline{BD}$

$=\overline{BD}\times\overline{AC}$



$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$=\cos\alpha\times\sin\beta+\cos\beta\times\sin\alpha$

sin差角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\left[\alpha+(-\beta)\right]$$

$$=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)$$

$$=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

cos和角公式

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\sin\left[90^\circ \quad (\alpha+\beta)\right]$$

$$=\sin\left[\left(90^\circ \quad \alpha\right)-\beta\right]$$

$$=\sin\left(90^\circ \quad \alpha\right)\cdot\cos(\beta)$$

$$-\cos\left(90^\circ \quad \alpha\right)\cdot\sin(\beta)$$

$$=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

cos差角公式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\left[\alpha+(-\beta)\right]$$

$$=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)$$

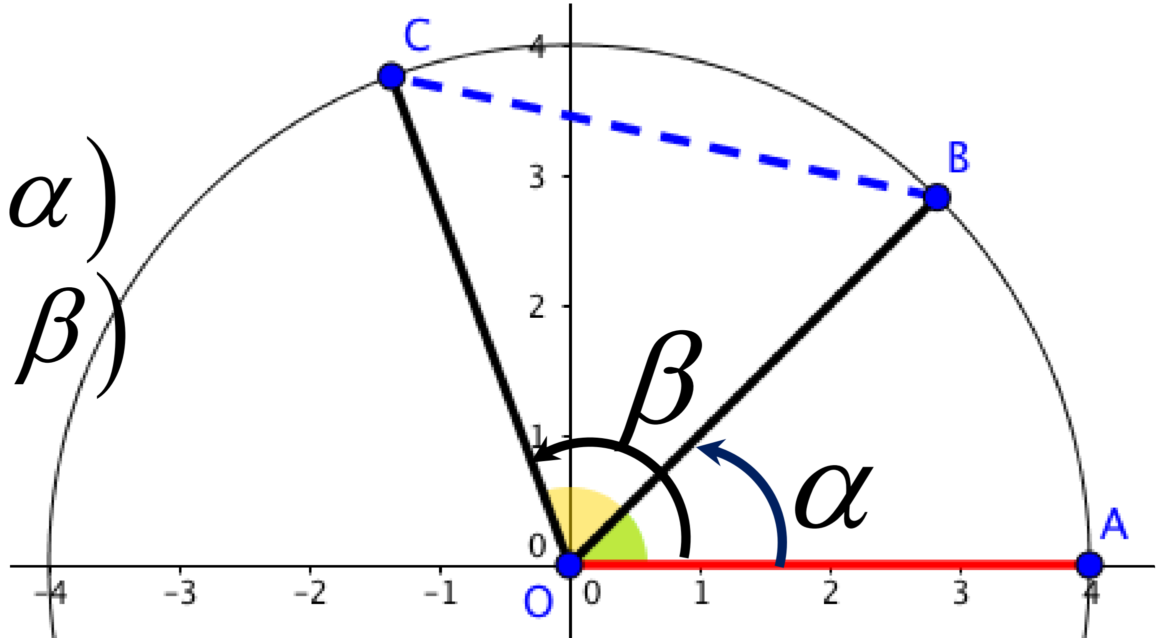
$$=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

正餘弦的和差角公式

正弦、餘弦的和角公式與差角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

$$A\left(r\ ,\ 0\right)$$
$$B\left(r\cos\alpha\ ,\ r\sin\alpha\right)$$
$$C\left(r\cos\beta\ ,\ r\sin\beta\right)$$

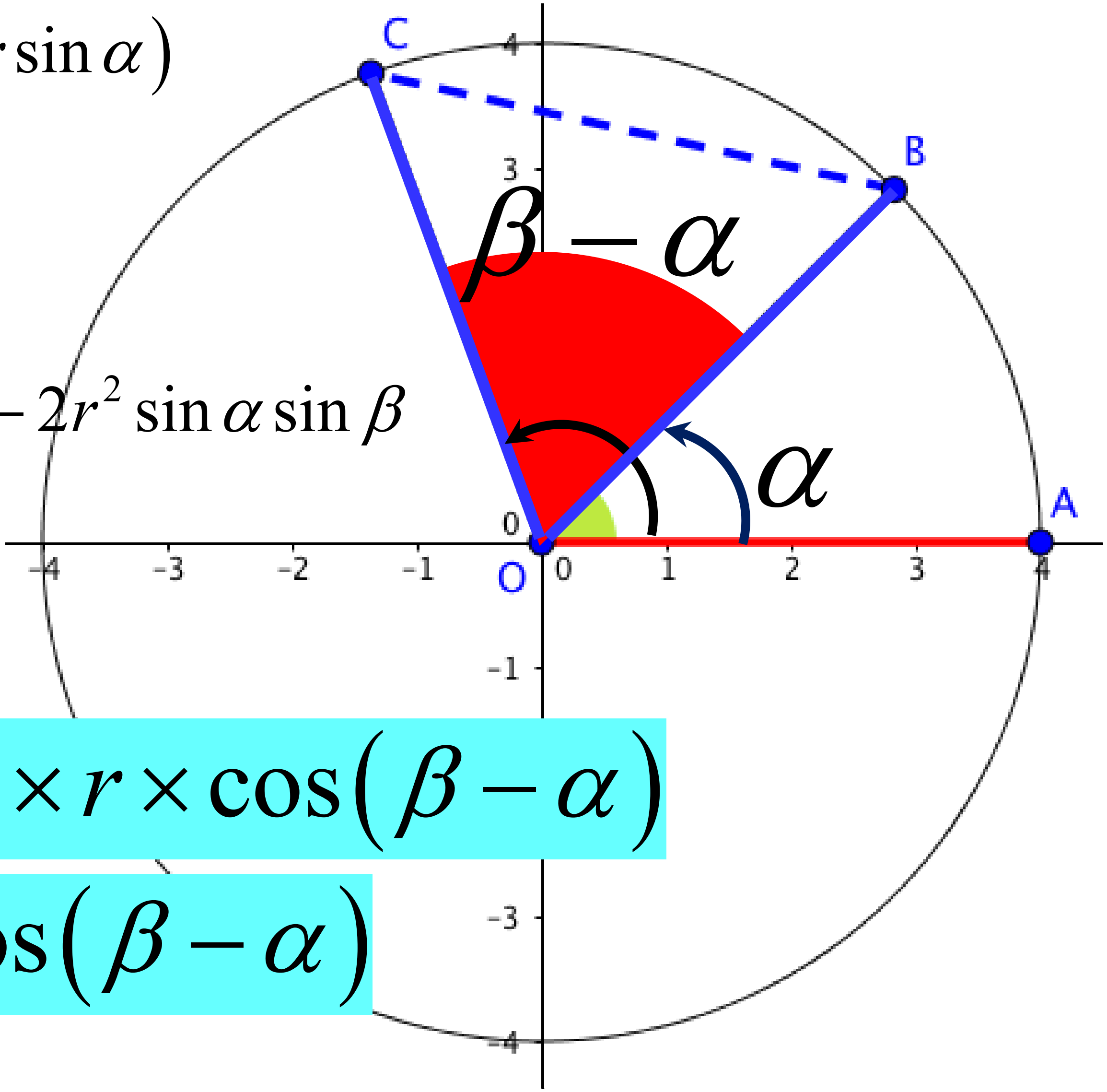


$$\overline{BC}^2$$
$$=\left(r\cos\alpha-r\cos\beta\right)^2+\left(r\sin\alpha-r\sin\beta\right)^2$$
$$=r^2\cos^2\alpha-2r^2\cos\alpha\cos\beta+r^2\cos^2\beta$$
$$+r^2\sin^2\alpha-2r^2\sin\alpha\sin\beta+r^2\sin^2\beta$$
$$=2r^2-2r^2\cos\alpha\cos\beta-2r^2\sin\alpha\sin\beta$$

$A(r\ ,\ 0)\quad B(r\cos\alpha\ ,r\sin\alpha)$

$C(r\cos\beta\ ,r\sin\beta)$

$$\overline{BC}^2$$
$$=2r^2-2r^2\cos\alpha\cos\beta-2r^2\sin\alpha\sin\beta$$



$$\overline{BC}^2$$
$$=r^2+r^2-2\times r\times r\times\cos(\beta-\alpha)$$
$$=2r^2-2r^2\times\cos(\beta-\alpha)$$

cos差角公式

$$\overline{BC}^2$$

$$=2r^2-2r^2\cos\alpha\cos\beta-2r^2\sin\alpha\sin\beta$$

$$=2r^2-2r^2\times\cos(\beta-\alpha)$$

$$\Rightarrow -2r^2\times\cos(\beta-\alpha)=$$
$$-2r^2\cos\alpha\cos\beta-2r^2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

課本P49

例題 1

求 $\cos 15^\circ$ 的值.

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos(60^\circ - 45^\circ)$$

正弦、餘弦的和角公式與差角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\,,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\,,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\,,$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\,.}$$

課本P51

例題 2

求 $\sin 75^\circ$ 和 $\sin 15^\circ$ 的值.

正弦、餘弦的和角公式與差角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

課本P51

例題 3

(1) 求 $\cos 48^\circ \cos 12^\circ - \sin 48^\circ \sin 12^\circ$ 的值.

(2) 求 $\sin 67^\circ \cos 83^\circ + \sin 23^\circ \cos 7^\circ$ 的值.

正弦、餘弦的和角公式與差角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

課本P51

練習

(1) 求 $\sin 200^\circ \cos 80^\circ - \cos 200^\circ \sin 80^\circ$ 的值.

(2) 求 $\cos 50^\circ \cos 20^\circ + \cos 40^\circ \cos 70^\circ$ 的值.

$$Ans: (1)\,\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

課本P52

$Ans:\dfrac{16}{65}$

例題 4

已知 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，且 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{12}{13}$，求

(1) $\sin(\alpha+\beta)$ 的值. (2) $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

依題意，$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\frac{5}{13}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

課本P52 $Ans:-\dfrac{63}{65}$

例題 4

已知 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，且 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{12}{13}$，求

(1) $\sin(\alpha+\beta)$ 的值.　　(2) $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

依題意，$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\frac{5}{13}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

課本P52

練習

已知 α 為第三象限角且 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，β 為第四象限角且 $\cos\beta=\frac{2}{3}$，

求(1) $\sin(\alpha-\beta)$ 的值. (2) $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

Ans: (1) $\frac{-6-4\sqrt{5}}{15}$. (2) $\frac{-8+3\sqrt{5}}{15}$.

正弦、餘弦的和角公式與差角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

講義類似題練習

講義例1~例3

講義P40

$Ans: \dfrac{56}{65}$

例題 4

$\triangle ABC$ 中，已知 $\cos A = -\dfrac{3}{5}$，$\cos B = \dfrac{12}{13}$，求 $\cos C$ 的值．

$$\begin{aligned}\cos C &= \cos\left[\pi - (A+B)\right] \\ &= -\cos(A+B) \\ &= -(\cos A\cos B - \sin A\sin B)\end{aligned}$$

講義P40

$Ans:\frac{1}{2}$

例題 5【常考題】

設 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{3}{2}$， $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，試求 $\cos(\alpha-\beta)$的值．

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$(\sin\alpha+\sin\beta)^2=\frac{9}{4}$$

$$(\cos\alpha+\cos\beta)^2=\frac{3}{4}$$

tan和差角公式

$\tan(\alpha+\beta)$、$\tan\alpha$及$\tan\beta$ 皆有意義

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

tan和差角公式

$\tan(\alpha+\beta)$、$\tan\alpha$及$\tan\beta$ 皆有意義

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1\quad\dfrac{\sin\alpha}{}\times\dfrac{\sin\beta}{}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\times\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\times\tan\beta}$$

tan和差角公式

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\times\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan\left[\alpha+(-\beta)\right]$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\times\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\times\tan\beta}$$

tan和差角公式

正切的和角公式與差角公式

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.

$\tan\alpha$，$\tan\beta$，$\tan(\alpha\pm\beta)$ 皆有意義.

課本P54

例題5

設 α，β，γ 為 $\triangle ABC$ 的三個內角．已知 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=-2$，求

(1) $\tan\gamma$ 的值．　(2) γ 的度數．

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \gamma=\pi-(\alpha+\beta)$$

$$\tan\gamma=\tan\left[\pi-(\alpha+\beta)\right]$$

$$=-\tan(\alpha+\beta)=-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\times\tan\beta}$$

$$=1$$

課本P54

例題 5

設 α，β，γ 為 $\triangle ABC$ 的三個內角．已知 $\tan\alpha = \frac{1}{3}$，$\tan\beta = -2$，求

(1) $\tan\ \gamma$ 的值．　　　　(2) γ 的度數．

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \gamma = \pi - (\alpha + \beta)$$

$$\tan\gamma = 1$$

$$0^\circ < \gamma < 180^\circ \Rightarrow \gamma = 45^\circ$$

課本P54

練習

已知 α，β 為銳角，且 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$，求

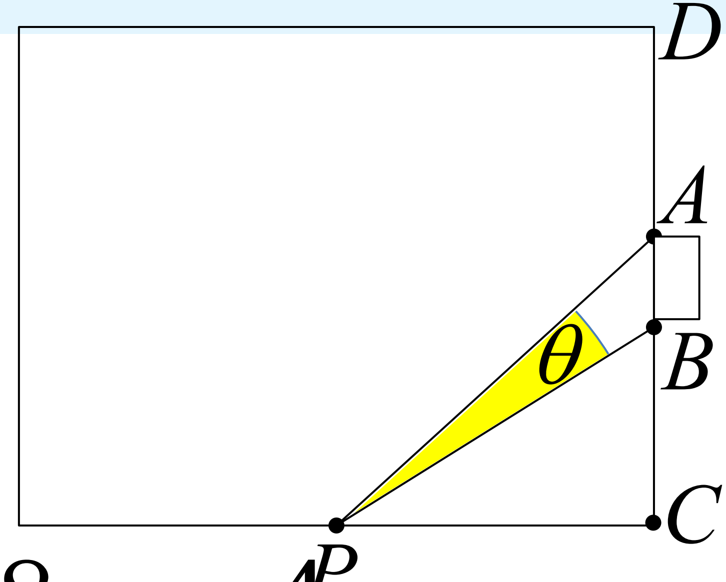
(1) $\tan(\alpha+\beta)$ 的值．　　(2) $\alpha+\beta$ 的度數．

Ans：(1) 1．(2) 45°．

課本P54

例題 6

如下圖，有一足球場寬 63 公尺，球門寬 7 公尺，某足球員沿邊界帶球突破，在距底線 35 公尺 P 處起腳射門．設此時 P 對球門所張的角為 θ，求 $\tan\theta$ 的值．



$\overline{AB}=7$ $\overline{CD}=63$

$\Rightarrow \overline{BC}=28$

又 $\overline{PC}=35$

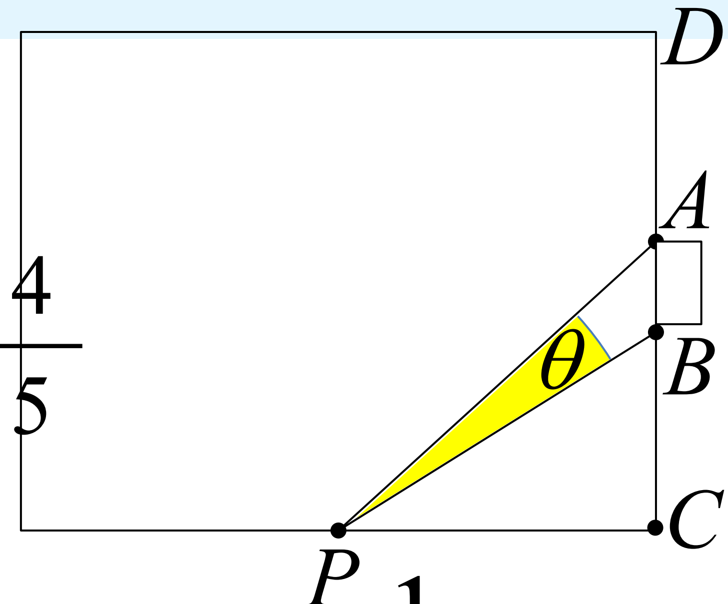
令 $\angle CPB=\alpha$

$$\therefore \tan\alpha=\frac{28}{35}=\frac{4}{5}$$

課本P54

例題 6

如下圖，有一足球場寬 63 公尺，球門寬 7 公尺，某足球員沿邊界帶球突破，在距底線 35 公尺 P 處起腳射門．設此時 P 對球門所張的角為 θ，求 $\tan\theta$ 的值．



$\overline{AB}=7$，$\overline{CD}=63 \Rightarrow \overline{BC}=28$

又 $\overline{PC}=35$

令 $\angle CPB=\alpha$ $\therefore \tan\alpha=\dfrac{28}{35}=\dfrac{4}{5}$

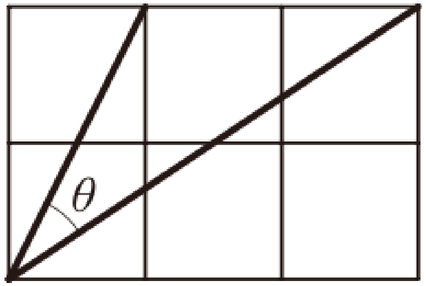
$$\tan(\alpha+\theta)=1$$

$$\therefore \tan\theta=\tan\left[(\alpha+\theta)-\alpha\right]=\frac{1}{9}$$

課本P55

練習

右圖中的小方格都是邊長為 1 的正方形，求 $\tan\theta$ 的值.



$$Ans:\frac{4}{7}$$

講義P42

例題 8【常考題】

$\triangle ABC$ 不為直角三角形，試證：$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$．

講義類似題練習

講義例6、7、9

二倍角公式

若$\alpha=\beta=\theta$ $\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$

$$\sin(\theta+\theta)=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta$$

正弦、餘弦的和角公式與差角公式

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

二倍角公式

若 $\alpha = \beta = \theta$ $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$\cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$$

正弦、餘弦的和角公式與差角公式

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

二倍角公式

若$\alpha = \beta = \theta$

$$\cos(\theta + \theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

二倍角公式

若$\alpha=\beta=\theta$

$$\tan(\theta+\theta)=\frac{\tan\theta+\tan\theta}{1-\tan\theta\times\tan\theta}$$

$$=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

正切的和角公式與差角公式

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.

$\tan\alpha$，$\tan\beta$，$\tan(\alpha\pm\beta)$ 皆有意義.

二倍角公式

二倍角公式

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$，

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$，

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$， $(\tan^2\theta \neq 1)$．

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta = \cos^2\theta\left(2\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \cos^2\theta\,(2\tan\theta)$$

$$= \frac{2\tan\theta}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}} = \frac{2\tan\theta}{\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

二倍角公式

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= \cos^2\theta\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

$$= \frac{1-\tan^2\theta}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

課本P56

例題 7

已知 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 且 $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$，求 $\sin 2\theta$ 和 $\cos 2\theta$ 的值．

$$90^\circ < \theta < 180^\circ \Rightarrow \cos\theta < 0$$

$$\therefore \cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = -\frac{24}{25}$$

課本P56

例題 7

已知 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 且 $\sin\theta = \frac{3}{5}$，求 $\sin 2\theta$ 和 $\cos 2\theta$ 的值.

$$90^\circ < \theta < 180^\circ \Rightarrow \cos\theta < 0$$

$$\therefore \cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta = \frac{7}{25}$$

課本P56

例題 8

已知 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{5}$，求 $\sin 2\theta$ 的值.

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \frac{1}{25}$$

$$\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{25}$$

課本P56

例題 8

已知 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$，求 $\sin 2\theta$ 的值.

$\because$ $:2\sin\theta\cos\theta$ $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{1}{25}$

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{25}$$

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$$

$$\therefore \sin 2\theta=\frac{24}{25}$$

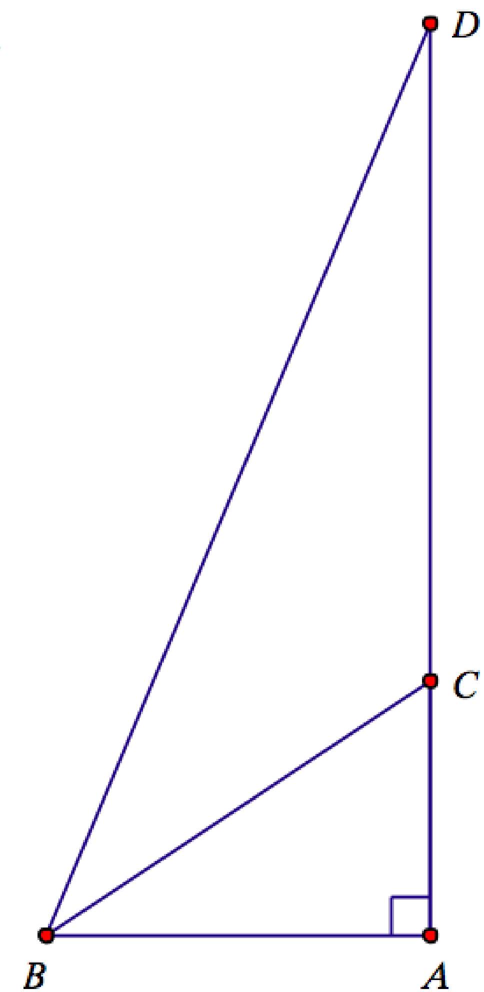
你不問我，換我問你

E. 如右圖，直角三角形 ABD 中，$\angle A$ 為直角，C 為 $\overline{AD}$ 邊上的點。

已知 $\overline{BC}=6$， $\overline{AB}=5$， $\angle ABD=2\angle ABC$ ，則

$\overline{BD}=\dfrac{㉓㉔}{㉕}$。(化成最簡分數)

$Ans:\dfrac{90}{7}$



課本P56

練習

已知 $270^\circ < \theta < 360^\circ$ 且 $\cos\theta = \dfrac{3}{4}$，求 $\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$ 及 $\tan 2\theta$ 的

Ans：$\sin 2\theta = -\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$，$\cos 2\theta = \dfrac{1}{8}$，$\tan 2\theta = -3\sqrt{7}$.

課本P57

例題 9

證明三倍角公式:

(1) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.

(2) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

三上 富士山上

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

塊三 =四塊三 減三塊

課本P57

練習

利用三倍角公式，求 $\dfrac{\sin 15^\circ}{\sin 5^\circ}-\dfrac{\cos 15^\circ}{\cos 5^\circ}$ 的值.

$Ans:2$

課本P58

例題 10

求 $\sin 18^\circ$ 的值.

課本P58

練習

設 $\theta=36^{\circ}$，選出正確的選項:

(1) $3\theta=180^{\circ}-2\theta$

(2) $\sin 3\theta=\sin 2\theta$

(3) $3-4\sin^{2}\theta=2\cos\theta$

(4) $4\cos^{2}\theta-2\cos\theta-1=0$

(5) $\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

$Ans:12345$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$\cos 2\theta$$

$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\theta \end{aligned}}$$

$$= \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$\tan 2\theta$$

$$= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\therefore \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\theta \\ &= \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\end{aligned}$$

半角公式

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$令\alpha = \frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

半角公式

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$$令\alpha = \frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

半角公式

$$\tan^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}$$

$$\Rightarrow\tan\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}}$$

$\cos\theta\neq-1$

令$\alpha=\dfrac{\theta}{2}$，$\tan\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

半角公式

半角公式

$$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}},$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}},$$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}},\quad (\cos\theta\neq-1).$$

其中等號右邊取正或取負，分別由 $\sin\frac{\theta}{2}$，$\cos\frac{\theta}{2}$ 及 $\tan\frac{\theta}{2}$ 為正或負來決定.

課本P59

例題 11

求 $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$ 與 $\tan\frac{\pi}{8}$ 的值.

$\frac{\pi}{8}$ 為第一象限角

$$\therefore \sin\frac{\pi}{8}=+\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{8}=+\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

課本P59

例題 11

求 $\sin\frac{\pi}{8}$，$\cos\frac{\pi}{8}$ 與 $\tan\frac{\pi}{8}$ 的值.

$\frac{\pi}{8}$為第一象限角

$$\tan\frac{\pi}{8}=+\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}}=\sqrt{2}-1$$

課本P60

例題 12

已知 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ 且 $\sin\theta = -\frac{4}{5}$，求 $\sin\frac{\theta}{2}$，$\cos\frac{\theta}{2}$ 與 $\tan\frac{\theta}{2}$ 的值．

$180^\circ <$ … $^\circ$

$\cos\theta = ?-\frac{3}{5}$

又 $90^\circ <$ … $\frac{\ }{2}$ … $^\circ$

$$\sin\frac{\theta}{2}$$

$$= +\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}$$

課本P60

例題12 已知 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ 且 $\sin\theta = -\frac{4}{5}$，求 $\sin\frac{\theta}{2}$，$\cos\frac{\theta}{2}$ 與 $\tan\frac{\theta}{2}$ 的值.

$180^\circ <$ … $^\circ$

$$\cos\theta = -\frac{3}{5}$$

又 $90^\circ <$ … $\frac{\ }{2}$ … $^\circ$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

課本P60

例題 12

已知 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ 且 $\sin\theta = -\frac{4}{5}$，求 $\sin\frac{\theta}{2}$，$\cos\frac{\theta}{2}$ 與 $\tan\frac{\theta}{2}$ 的值.

$180^\circ < \theta < 270^\circ$

$\cos\theta = -\frac{3}{5}$

又 $90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$

$$\tan\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = -2$$

課本P61

練習

已知 $45^\circ < \theta < 90^\circ$ 且 $\sin 2\theta = \frac{4}{5}$，求 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 與 $\tan\theta$ 的值.

Ans: $\sin\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\tan\theta = 2$.

課本P61

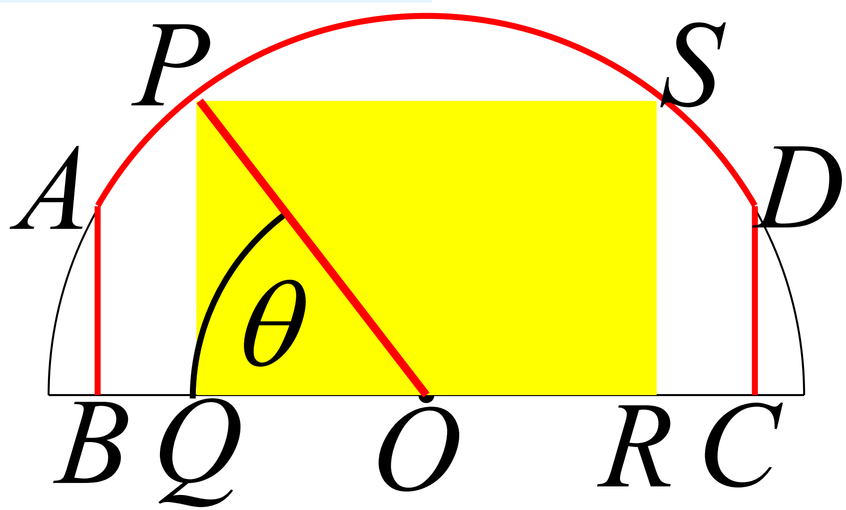
例題 13

如右圖所示，在山壁上鑿出一隧道形狀的倉庫，上沿為圓弧 $\overset{\frown}{AD}$，其所在圓的圓心為 $\overline{BC}$ 的中點 O，半徑為 10 公尺，$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 均垂直於 $\overline{BC}$，且 $\overline{AB}=\overline{CD}=5$ 公尺．今有一矩形箱子欲放入隧道形倉庫裡，試問：這矩形箱子的正面面積最大值為多少平方公尺？

若$PQRS$為所求

連接$\overline{OP}$，

令$\angle POQ=\theta$



課本P61

例題 13

如右圖所示，在山壁上鑿出一隧道形狀的倉庫，上沿為圓弧 $\overset{\frown}{AD}$，其所在圓的圓心為 $\overline{BC}$ 的中點 O，半徑為 10 公尺，$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 均垂直於 $\overline{BC}$，且 $\overline{AB}=\overline{CD}=5$ 公尺．今有一矩形箱子欲放入隧道形倉庫裡，試問：這矩形箱子的正面面積最大值為多少平方公尺？

若$PQRS$為所求

連接$\overline{OP}$ ，

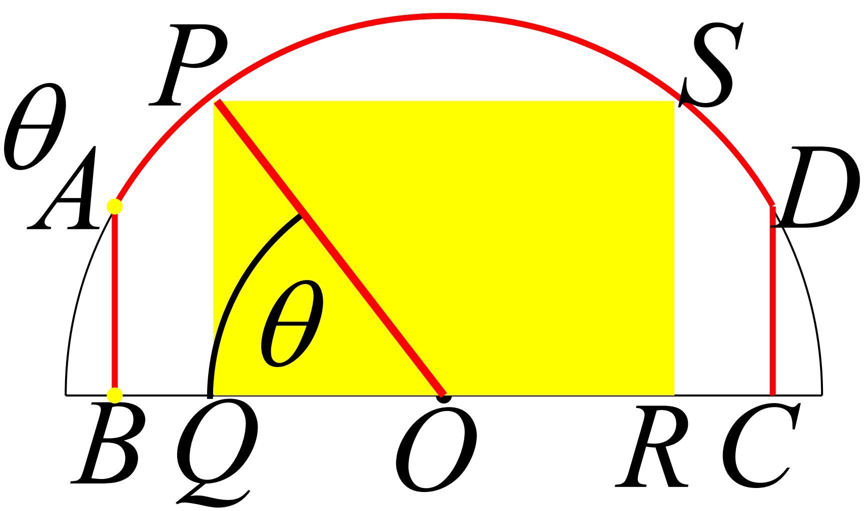
令$\angle POQ=\theta$

$$\overline{PQ}=10\sin\theta$$

$$\overline{PS}=2\overline{OQ}=20\cos\theta$$

$$\text{面積}=\overline{PQ}\times\overline{PS}$$

$$=200\sin\theta\cos\theta$$



課本P61

例題 13

如右圖所示，在山壁上鑿出一隧道形狀的倉庫，上沿為圓弧 $\overset{\frown}{AD}$，其所在圓的圓心為 $\overline{BC}$ 的中點 O，半徑為 10 公尺，$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 均垂直於 $\overline{BC}$，且 $\overline{AB}=\overline{CD}=5$ 公尺．今有一矩形箱子欲放入隧道形倉庫裡，試問：這矩形箱子的正面面積最大值為多少平方公尺？

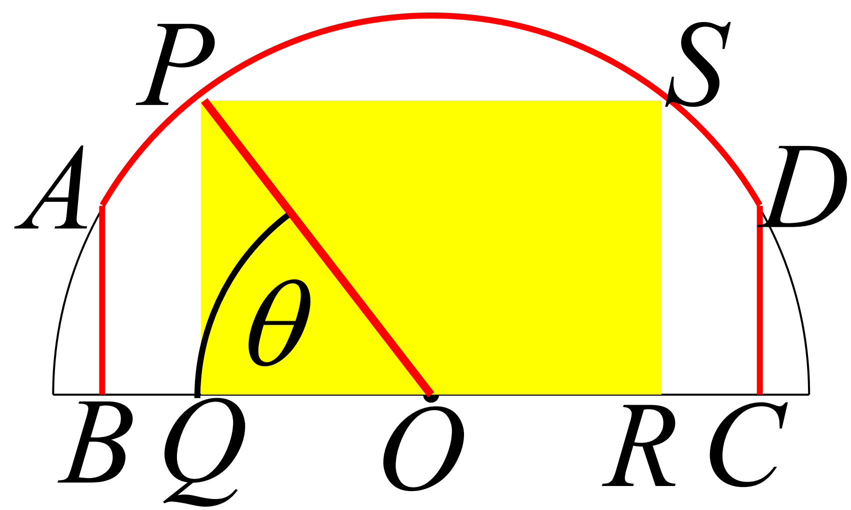
若$PQRS$為所求

連接$\overline{OP}$，令$\angle POQ=\theta$

$\overline{PQ}=10\sin\theta$　$\overline{PS}=20\cos\theta$

面積$=\overline{PQ}\times\overline{PS}$

$=200\sin\theta\cos\theta$



面積$=200\sin\theta\cos\theta$

$=100\sin 2\theta$

又$\sin 2\theta\le 1$

當$\theta=45^\circ$時，

矩形$PQRS$有最大面積100

當$a>0$，$b>0$，則$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

$"=":a=b$

例題 13

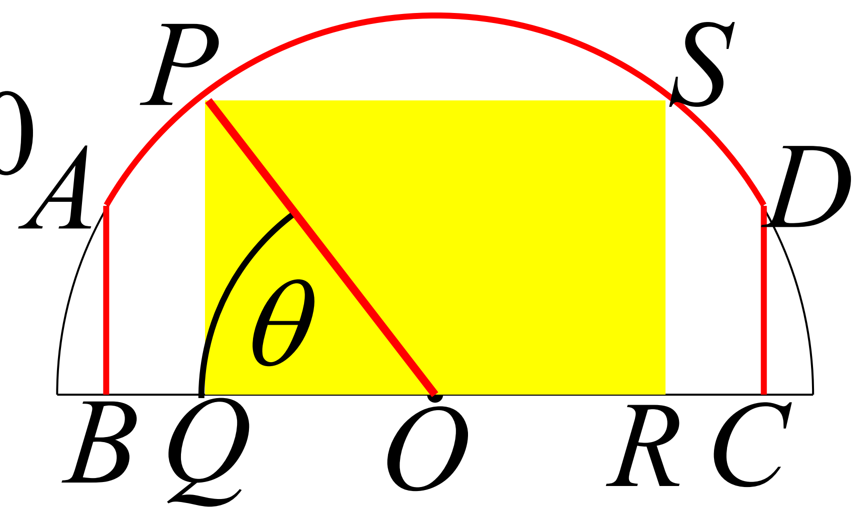
一隧道形狀的倉庫，上沿為圓弧 $\overset{\frown}{AD}$，其所在圓的圓心為 $\overline{BC}$ 的中點 O，半徑為 10 公尺，$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 均垂直於 $\overline{BC}$，且 $\overline{AB}=\overline{CD}=5$ 公尺．今有一矩形箱子欲放入隧道形倉庫裡，試問：這矩形箱子的正面面積最大值為多少平方公尺？

若$PQRS$為所求

連接$\overline{OP}$，令$\angle POQ=\theta$

$\overline{PQ}=10\sin\theta$　$\overline{PS}=20\cos\theta$

$$\text{面積}=\overline{PQ}\times\overline{PS}$$
$$=200\sin\theta\cos\theta$$



$$\text{面積}=200\sin\theta\cos\theta$$

$\because$　　　　), $\cos\theta>0$

$$\therefore\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}\geq\sqrt{\sin\theta\cos\theta}$$

當$a>0$，$b>0$，則$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

"$=$"：$a=b$

例題 13

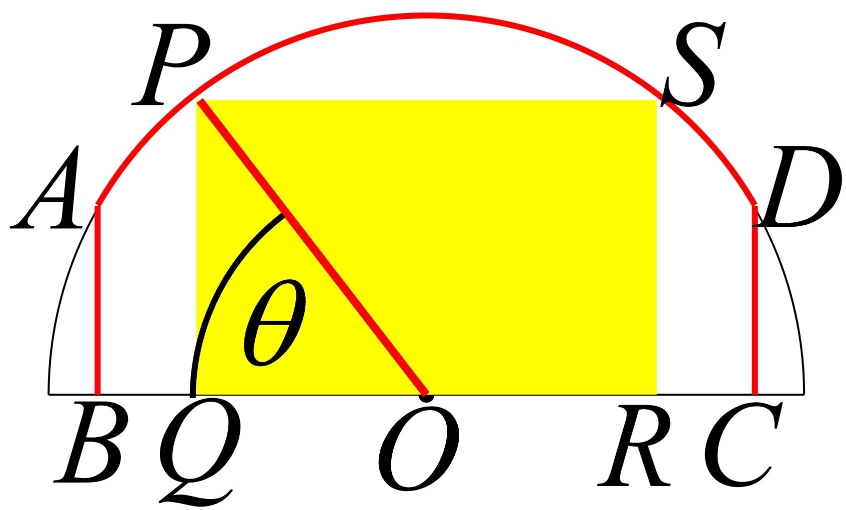
一隧道形狀的倉庫，上沿為圓弧 $\overset{\frown}{AD}$，其所在圓的圓心為 $\overline{BC}$ 的中點 O，半徑為 10 公尺，$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 均垂直於 $\overline{BC}$，且 $\overline{AB}=\overline{CD}=5$ 公尺．今有一矩形箱子欲放入隧道形倉庫裡，試問：這矩形箱子的正面面積最大值為多少平方公尺？

若$PQRS$為所求

連接$\overline{OP}$，令$\angle POQ=\theta$

$\overline{PQ}=10\sin\theta$　$\overline{PS}=20\cos\theta$

$$\text{面積}=\overline{PQ}\times\overline{PS}$$
$$=200\sin\theta\cos\theta$$



$\because$　　　　　)，$\cos\theta>0$

$$\therefore\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}\geq\sqrt{\sin\theta\cos\theta}$$

當 $\sin\theta=\cos\theta$ 時，

等號成立

即 $\sin\theta=\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

講義類似題練習

講義例15、16