力矩、外積與右手定則（上）
～將物理概念數學化的歷程～

楊宗穎、陳建燁

臺北市立第一女子高級中學數學教師

前言：

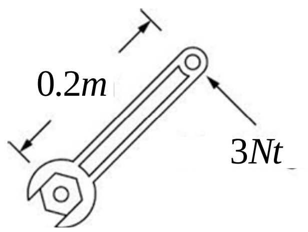
在 99 課程綱要空間向量的主題中，教學內容包含『內積與餘弦的關係』與『外積與正弦的關係』。有關『內積與餘弦的關係』，教科書中常以物理上作功的概念作為引入，再將作功的概念數學化，發展出向量內積的運算，由於水平分力方能作功，故明顯可見內積與餘弦的關係。但對於『外積與正弦的關係』，教科書中先以向量外積的坐標表達式作為定義，強調向量的外積仍為向量，並且驗證外積的長度恰為兩向量所展成的平行四邊形面積，用以連結外積與正弦的關係，最後再將右手定則直接認定為是外積的性質（無驗證過程）。造成學生在此單元的學習上常有以下三點疑問：

1. 為何向量的外積仍為向量而非純量，向量的外積本質意義究竟為何？
2. 所謂外積的長度等於平行四邊形面積，為何長度跟面積兩個不同單位的數值可以拿來比較大小？
3. 為何向量外積在教科書中所定義的坐標表達式必定滿足右手定則？

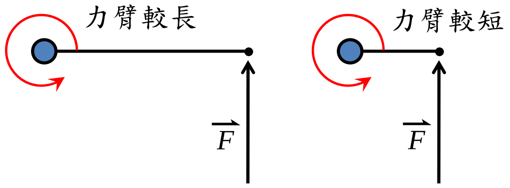
本文的重點在於從物理的概念，將其數學化，進一步發展出向量的外積運算，並推導外積的坐標表達式，從探討的過程中，即可明確的回答上述三個學生常見的疑問。

力矩的意義

力矩是能使物體繞著轉軸改變轉動行為的物理量，可以用來形容物體轉動的難易程度，在物理學上，作用力使物體繞著轉動軸或支點轉動的趨向，此物理量即稱為『**力矩**』。力矩能使物體改變其旋轉運動，例如：用扳手的開口箝緊螺栓或螺帽，然後轉動扳手，這動作會產生力矩來轉動螺栓或螺帽。



以相同的力垂直作用在不同長度的力臂上，即會產生不同的力矩，會直接影響到轉動的難易程度，當然施力的大小與角度也會影響轉動的程度，簡單的來說，如果施力的角度與力臂平行，那麼根本不會造成轉動的現象。將轉動的效果視為力矩的大小，然而影響轉動的效果有三個因素：(1) 力臂的大小　(2) 施力的大小
(3) 施力的角度。



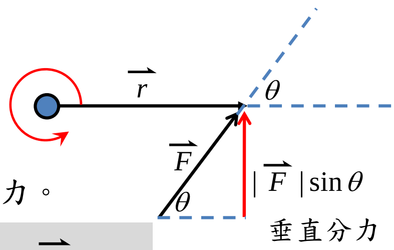
（轉動較容易）　（轉動較困難）

國中理化中有關力矩的問題都僅在二維平面中探討，當力臂長為2公尺，垂直有效作用力為10牛頓時，力矩的大小即為$2\times10=20$（牛頓‧米）。此外尚須進一步描述力臂旋轉的方向是順時針旋轉或是逆時針旋轉。由此可知，國中理化在介紹力矩概念時，已經傳達出力矩是一個具有『**大小**』以及『**方向性**』的物理量。倘若我們希望在三度空間中去形容一個物理現象，那麼在三度空間中的力矩，該怎麼描述力臂轉動的方向性呢？

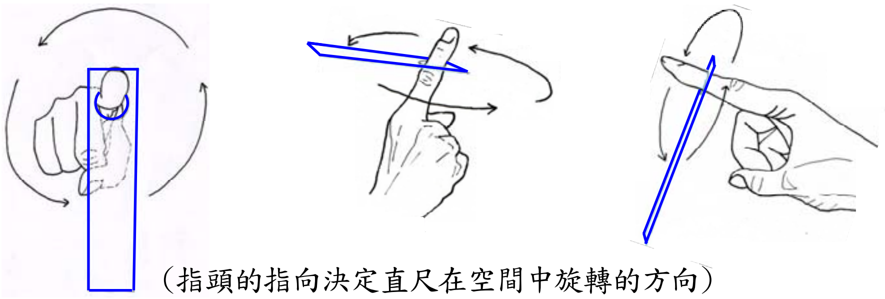
用向量描述轉動行為

由於力矩是一個具有大小及方向的物理量，從數學的角度來看，即是向量。因此我們將用向量來重新包裝力矩的概念。

以轉軸為軸心，將力臂視為一個向量$\overrightarrow{r}$（起點為轉軸),令$\overrightarrow{F}$為另一個施力的向量，其中$\overrightarrow{r}$與$\overrightarrow{F}$的夾角θ為施力的角度，則$|\overrightarrow{F}|\sin\theta$即為相對於力臂$\overrightarrow{r}$的垂直分力。有關力矩的大小我們定義為力臂長與垂直分力的乘積$|\overrightarrow{r}|\cdot|\overrightarrow{F}|\sin\theta$。

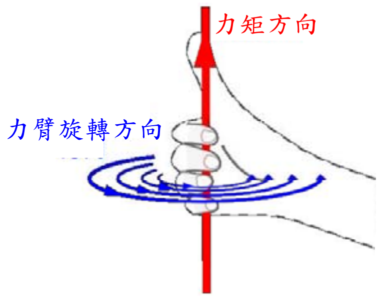


在空間中，相同的力臂長、相同的施力與相同的施力角度，將造成力臂有相同的轉動程度（相同的力矩大小），但卻會因施力的方向不同，造成力臂有不同的轉動現象（旋轉方向）。若考慮一把直尺在手指上固定旋轉，將該手指視為轉軸，則手指所指的方向與直尺旋轉的方向將會具有一一對應關係。這啟發了我們利用手指頭的方向來描述直尺轉動的方向性。

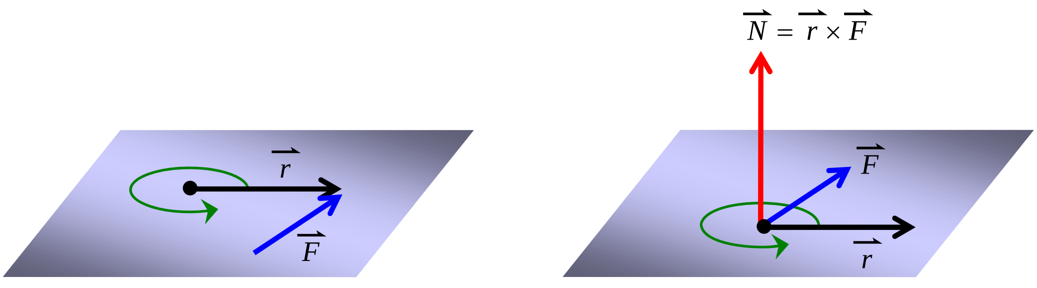

(指頭的指向決定直尺在空間中旋轉的方向)

有關力矩的方向，為了明確的描述力臂的轉動現象，我們特以右手定則規定：若力臂轉動方向與右手四指轉動方向一致（從開掌到握拳的過程），則姆指的指向即視為力矩的方向（當然這裡我們將拇指的方向視為與四指方向垂直，四指用來模擬力臂的旋轉現象）。

以右手定則來定義力矩的方向，可知拇指的方向一旦確定了，則力臂的旋轉方向隨之確定。由於在空間中，順時針與逆時針已無法確切描述力臂的轉動行為，透過第三個維度的方向，即可以確切的描述力臂的轉動行為。



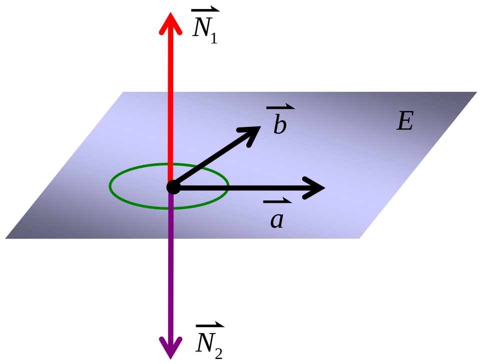
符號上，我們將力矩記為 $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$ ，並讀作『力臂向量 $\overrightarrow{r}$ cross 作用力向量 $\overrightarrow{F}$ 』。



由上可知，一個作用力 $\overrightarrow{F}$ 作用在力臂 $\overrightarrow{r}$ 上，即可形成力矩 $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$ ，其中力矩 $\overrightarrow{N}$ 仍為一個向量，並且 $\overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{r}$ 與 $\overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{F}$ ，此外 $\overrightarrow{r}$ 、 $\overrightarrow{F}$ 、 $\overrightarrow{N}$ 滿足右手定則。

公垂向量

給定空間中兩不平行非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，若向量 $\vec{c}$ 與 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 皆垂直（ $\vec{c}\perp\vec{a}$ 且 $\vec{c}\perp\vec{b}$ ），則稱 $\vec{c}$ 為 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的『**公垂向量**』。



由於 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 決定空間中一個平面 E，若僅考慮長度為 1 的公垂向量，依照方向的不同， $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 共有兩個公垂單位向量 $\vec{N_1}$ 、 $\vec{N_2}$ 。

在力矩的概念中，因為 $\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}$ 與力臂 $\vec{r}$ 、作用力 $\vec{F}$ 皆垂直，故 $\vec{N}$ 為 $\vec{r}$ 、 $\vec{F}$ 的公垂向量。又因為 $\vec{r}$ 、 $\vec{F}$ 、 $\vec{N}$ 需滿足右手定則，故力矩 $\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}$ 的方向將被唯一決定。

外積的定義

在我們了解了力矩的意義之後，用數學語言來包裝力矩概念，我們明白力矩就是一個具有大小及方向的向量，將力臂與作用力分別視為空間中兩個向量 $\vec{r}$ 與 $\vec{F}$ ，而 $\vec{r}$ 與 $\vec{F}$ 所造成的力矩即為另一個空間向量 $\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}$ ，其大小為 $|\vec{r}|\cdot|\vec{F}|\sin\theta$ (其中 θ 為 $\vec{r}$ 與 $\vec{F}$ 的夾角)，方向為 $\vec{r}\times\vec{F}$ 依右手定則姆指的指向。

從數學的角度出發，我們將力矩的概念數學化，視力矩為兩個向量透過某種特殊的運算後所得的特殊公垂向量，進而正式定義空間向量的外積運算如下:

外積運算的定義

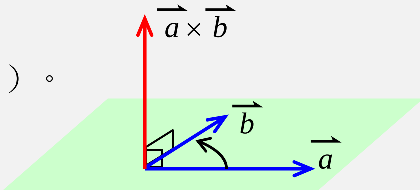
令 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 為空間中兩個非零向量，其中 θ 為 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角。

我們定義 $\vec{a}$ 對 $\vec{b}$ 的外積為一個向量，記為 $\vec{a}\times\vec{b}$ ，需滿足下列三個條件：

1. 方向與 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 皆垂直。

2. 長度為 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$ （此為力矩大小）。

3. $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{a}\times\vec{b}$ 必須滿足右手定則。



特別的，若 $\vec{a}$ 或 $\vec{b}=\vec{0}$ ，則定義 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ 。

外積的坐標表示法

由於我們已經有空間坐標的概念，現在我們將探討向量外積的坐標表示法，以及外積運算在代數上有甚麼樣的表徵。

考慮兩非平行向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 、 $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ ，不失一般性，假設 $a_1:a_2\neq b_1:b_2$ ，意即 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 。

我們欲求出向量 $\overrightarrow{n}$ 滿足：（**1**） $\overrightarrow{n}$ 為 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的公垂向量。

（**2**） $|\overrightarrow{n}|=|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\sin\theta$ ，其中 θ 為 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角。

（**3**） $\overrightarrow{n}$ 為 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 遵循右手定則中拇指所指定的方向。

滿足上述條件的向量 $\overrightarrow{n}$ 即為 $\overrightarrow{a}$ 對 $\overrightarrow{b}$ 的外積，也就是 $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 。

【尋找公垂向量比例】

令 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，其中 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{a}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{b}$ ，換句話說， $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n}=0$ 且 $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{n}=0$

$$\begin{cases}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n}=0\\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{n}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a_1,a_2,a_3)\cdot(x,y,z)=0\\ (b_1,b_2,b_3)\cdot(x,y,z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1x+a_2y+a_3z=0\\ b_1x+b_2y+b_3z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1x+a_2y=-a_3z\\ b_1x+b_2y=-b_3z\end{cases}$$

將上述聯立方程式視為二元一次聯立不等式（ x,y 為變數，z 視為常數）。
根據克拉瑪公式：

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-a_3z & a_2\\ -b_3z & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}-a_3 & a_2\\ -b_3 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}z=\frac{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}z \text{ 、 } y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & -a_3z\\ b_1 & -b_3z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & -a_3\\ b_1 & -b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}z=\frac{\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}z$$

所以 $x:y:z=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$ 。

因此對任意實數$t\in\mathbb{R}$，向量$t(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix})$皆為$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的公垂向量。

故可令$\overrightarrow{n}=t(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix})$，其中$t\in\mathbb{R}$。

【符合外積長度限制】

由於外積的向量長度為$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\sin\theta$。

已知公垂向量皆可假設為$\overrightarrow{n}=t(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix})$，其中$t\in\mathbb{R}$。

今欲求出實數t，使的$|\overrightarrow{n}|=|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\sin\theta$。

$$|\overrightarrow{n}| = |t|\sqrt{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}^2} = |t|\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$

$$= |t|\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2}$$

$$= |t|\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2} = |t|\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\cos^2\theta}$$

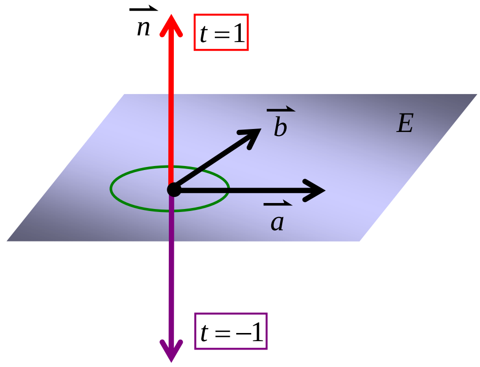
$$= |t|\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2(1-\cos^2\theta)} = |t|\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\sin^2\theta}$$

$$= |t|\cdot|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\sin\theta \qquad (\text{因為 } 0\le\theta\le\pi\text{，所以 }\sin\theta\ge 0)$$

欲滿足$|\overrightarrow{n}|=|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\sin\theta$，則$|t|=1 \iff t=\pm 1$。

【遵循右手定則】

根據上述的討論，可知 $\overrightarrow{n}=t(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix})$，其中 $t=\pm1$，即為滿足公垂性質與長度限制的唯二向量。



若考慮特殊情況，

令 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}=(1,0,0)$、$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{j}=(0,1,0)$，

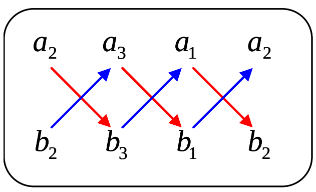
則 $\overrightarrow{n}=t(\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix})=t(0,0,1)$。

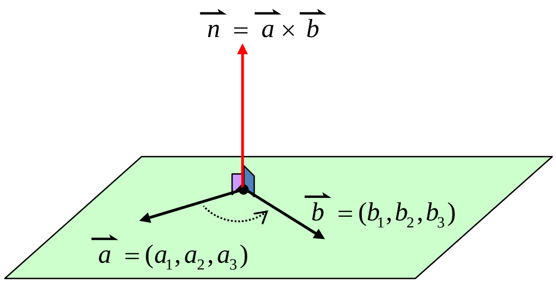
因為 $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}=(0,0,1)$，故 $t=1$。

但對於一般情形，$t=1$ 時，一定能保證 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{n}$ 滿足右手定則嗎？

我們認為這並無法直觀的給予肯定的答案。故在〈力矩、外積與右手定則（下）〉一文中，我們將用更嚴謹的數學論述來說明，『若要滿足右手定則，則 $t=1$ 的必然性』！

一旦能說明了 $t=1$ 的必然性，則可知 $\overrightarrow{n}=(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix})$ 是唯一滿足『公垂性質』、『長度限制』以及遵循『右手定則』的向量，意即 $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$，此即為向量外積的坐標表示法。





結語：

從物理的力矩概念出發，進一步發展出數學向量外積運算，是一個將抽象概念量化的美妙結論，力矩是靈魂，外積則是其骨架，有了骨架就大大的提高了操作性，用一個空間向量來作為空間中力矩的代數表徵，讓力矩不僅僅只是描述轉動現象，更可以直接計算，能輕易的處理『合力矩』的問題。現行教科書或許礙於篇幅與考試取向，皆傾向於『用結果當定義（直接用坐標表達式當外積定義），把定義當性質（外積長度等於面積，外積滿足右手定則）』，如此一來，學生在學習向量外積的時候，能不產生本文前言中所描述的三點疑問也難！

參考資料：

1. 張海潮，〈克拉瑪公式和外積〉，《教育部高中數學學科中心電子報》第 29 期。
2. 張海潮，〈外積服從右手定則〉，《教育部高中數學學科中心電子報》第 66 期。
3. 洪美珠，〈淺談高中數學外積〉，《教育部高中數學學科中心電子報》第 45 期。
4. 王九逵、胡門昌，〈談向量的外積〉，《數學傳播》第 4 卷第 3 期(15)，1980。
5. 普通高級中學數學，第四冊，南一書局。
6. 普通高級中學數學，第四冊，龍騰書局。
7. 左銓如，《初等解析幾何研究》，p131~135，九章出版社。