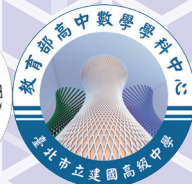


新舊課綱 數學領域銜接教材

教學資源手冊

指導單位：教育部國民及學前教育署、臺北市政府教育局
主辦單位：教育部高中數學學科中心（臺北市立建國高級中學）





編輯大意



銜接教材編寫的目的是銜接國中新舊課綱之間的落差，內容包含「等比數列」、「三視圖」、「空間中的線與平面」三個單元，「直角三角形的三角比」列為附錄。編寫委員除了教材以外，進一步編寫了教學資源手冊，提供教學指引、學習單、評量卷與參考資料，這些內容的大意如下：

- 一、教學指引的內容包含教材編寫想法、教學注意事項與參考資料的來源，這些都是很重要的備課內容，希望教師在教學準備中可以精確掌握課綱精神與作者編寫的要義。
- 二、根據教材內容精心安排設計的學習單，可以搭配不同的教學策略，若考慮有限的教學時數，則可以提供學生做課後練習使用。
- 三、評量卷提供教師作為課後評量的題材，了解學生的學習成效，藉以落實銜接教材的教學目標。
- 四、關於直線垂直平面法線定理，我們放置在參考資料部分，以提供老師對於輔導學生做延伸學習的參考。

銜接教材實施的目的是銜接國中新舊課綱之間的落差，教學資源手冊的內容可以使教師充分了解教材編寫的精神與內涵，並且提供各種配套的工具（學習單與評量卷），以作為教師備課的參考，使得教師可以更有效率完成銜接教材內容的教學。

目 錄

 第一部分 教學指引 1

 第二部分 學習單 6

 第三部分 評量卷 26

 第四部分 參考資料 37



單元一 等比數列

1. 編者對於介紹等比數列的意義或公式都是從實例引入，藉由數字例或生活實例使學生體驗與了解等比數列的規則。編者認為從具體到抽象來學習一個新的觀念，對於初學者而言這是很自然的學習方式。
2. 編者透過網路遊戲「2048」中螢幕出現的數字引導學生發現數列前後的比值都相等，進而介紹等比數列。有別於從成長模型來介紹等比數列，成長模型雖然重要，但是銜接教材時數不多，因此編者藉由網路遊戲的例子，引起學生興趣，教師容易引導學生直接觀察數字規則，進而介紹等比數列。
3. 對於等比數列一般項公式的推導，編者先用例題一的數字例引導學生發現一般項公式背後的意義（每次項數增加 1，就會多乘 1 次公比），教材的安排就是希望學生能夠藉由實例了解一般項公式的意義，而不是純粹死記公式。對照等差中項，例題二則是介紹等比中項。





單元二 三視圖

在本銜接手冊放了二個例題，以下說明其教學想法。

例題一：繪製立體圖形從不同方向（前、後、左、右、上方）所觀察的視圖，以建立對前視圖、後視圖、左視圖、右視圖、上視圖等名詞及其相關的定義。

例題二：透過前面的例題一發現，僅需要觀察上視圖、前視圖（或後視圖）、左視圖（或右視圖）三個視圖即可，因此練習繪製給定立體圖形的三視圖。

關於三視圖，教師在教學時需注意以下幾項事情：

1. 三視圖銜接國小有關立體圖形的簡易概念，填補國中有關立體空間的討論，再延伸至空間平面的了解，而且其中與 3D 動畫和 3D 列印相關的數學原理在以往的數學課程是被忽略的。
2. 本單元以正方體積木的堆疊連結，來培養學生觀察立體圖形並繪製視圖，由於立體圖形需要實物操作，建議教師們可以使用易於連結的立方體小積木，讓學生製作相關的立體圖形來觀察和說明。
3. 本單元的立體圖形目前都限制在內嵌於 $3 \times 3 \times 3$ 的正立方體且不得中空，所以教師在立體圖形的繪製，若遇到小立方體堆疊的圖形，可以利用高雄市博愛國小許俊文老師的網頁 <http://www.paps.kh.edu.tw/flash/math/perspective/perspective.htm> 來協助繪製。
4. 領綱在三視圖的學習內容說明僅侷限於觀察與討論立體圖形的前視圖、上視圖、左（右）視圖，因此由三視圖的觀察後推理重新製作立體圖形並非本條學習內容的教學目標，不適宜當成評量目標。





單元三 空間中的線與平面

本單元課程內容原為 99 課綱十一年級課程空間概念單元中的一部分，國小及國中在空間中認識皆從具體的錐體、柱體中進行，從八年級一直到十一年級才再次教授空間概念，在有限的教學時數下，學生要將空間中的元素由有限的形體抽象出無限延伸的直線與平面，在教學上造成困難。

根據 Van Hiele 的幾何思考的發展模式，學生要從分析(Analysis)的層次進階到非形式歸納(Informal Deduction)的層次，必須要有足夠的幾何教學活動，108 課綱將此單元移至九年級，希望學生從實做與操作中體驗、感受，對空間中的基本元素有初步的體驗，將來在十一年級學習時，能順利銜接。

本教材根據條目 S-9-13 內容編寫，以操作活動為主，認識空間中「面與面的平行與垂直」、「直線與直線的垂直、平行、歪斜」、「直線與面的平行與垂直」。教學時間為二堂課，在課堂上讓學生實際製作長方體與正四面體的空心模型後，以此模型進行教學。課程設計也以提問→操作探索→歸納→辯證→結論的教學活動為主軸。空間中概念的學習與我們生活環境中的形體密不可分，教師應盡量提供學生動手操作及觀察的機會，並與課程內容結合，促進學習。

教材內容先介紹直線與平面的無限延伸概念，接著介紹長方體與正四面體(國小時歸類為三角錐的一種)，讓學生練習畫它們的示意圖。再從這兩個形體的結構中，認識兩相異平面的關係為平行、交於一直線(例題一)；兩相異直線的關係為平行、交於一點、歪斜(例題二)；最後說明直線與平面的關係(例題三)，並說明直線與平面垂直的意義。





附錄 直角三角形的三角比

一、學習表現與學習內容的討論：

依據十二年國民基本教育數學領域課程綱要（105年2月草案）

1. 學習表現：

S-IV-12 理解直角三角形中某一銳角的角度決定邊長的比值，認識這些比值的符號，並能運用到日常生活的情境解決問題。

2. 學習內容：

S-9-4 相似直角三角形邊長比值的不變性：直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變。

說明 1：為何引進坡度情境？

國中階段，在相似形單元，所使用的邊長比，是使用在兩個不同三角形間的邊長比，並非同一個三角形的邊長比。學生在轉換時，極可能有認知上的困難，因為在國中階段的學習需求與任務上，同一個三角形的某兩邊的長度比，並沒有賦於任何意義的學習經驗。故而，使用坡度情境的目的即在提供這樣的經驗。

說明 2：「45-45-90 度與 30-60-90 度的對邊比」學過沒有？

至於「45-45-90 度與 30-60-90 度的對邊比」，此學習內容，雖然未來調整到 9 年級（應是 9 上），但對於學習九年一貫課程下的高中生，他們在 8 下就學過了（現在放在 8 下）。所以，將此學習內容視為已知知識。但對未來的 9 年級學生（12 年課綱下），這兩個學習內容是進度（尚未學習的）。

S-9-5 直角三角形的三角比：對直角三角形的一個銳角定義「斜邊」、「鄰邊」、「對邊」，並引入符號 $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$ ；直角三角形內，給定一邊的長和一個銳角的角度，決定另一邊的邊長。（學生無使用計算機時，角度限於 30 度、45 度、60 度）。

二、教學資源

鄧家駿、曾明德。直角三角形的三角比：75%的險升坡。國教院教學模組教材。

<https://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/img/89/200112631.pdf>

吳汀菱。銳角與廣義角三角函數。DeltaMOOCx 愛學網線上課程。

<http://edu.deltamoocx.net/course/content/chapter/373>



單元一 等比數列

等比數列的第 n 項公式：

等比數列： $a_n = a_1 \times r^{n-1}$ (r 為公比， $r \neq 0$)

問題一：認識等比數列

(1) 在下列各空格填入適當的數，使得每個數列成為等比數列：

3, 9, _____, _____。

-5, 15, _____, _____。

(2) 請問下列哪些數列是等比數列：_____

(A) -2, -2, -2, -2, -2

(B) 1, 3, 5, 7, 9

(C) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$

(D) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$

(E) 3, $3 \times (1.1)$, $3 \times (1.1)^2$, $3 \times (1.1)^3$, $3 \times (1.1)^4$



問題二：等比數列的公式與概念

(1) 已知某一等比數列的首項為 10，公比為 -2。求第四項。

(2) 已知某一等比數列的首項為 8，第四項為 1。寫出此數列的前五項。



問題三：數列的大小趨勢

在等差數列的學習中我們發現：

當 $d > 0$ 時， $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$ ，即數列的值越來越大；

當 $d = 0$ 時， $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$ ，即數列的值不變；

當 $d < 0$ 時， $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n$ ，即數列的值越來越小。

在等比數列中，不同的公比，是否數列各項或奇數與偶數項的大小趨勢也有類似的性質呢？

我們透過以下的幾個實際的數列來加以探討：

(1) 試根據以下條件，寫出各等比數列的前五項，並填入下表。

首項	3	3	3	3
公比	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2
前五項				
首項	-3	-3	-3	-3
公比	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2
前五項				

(2) 並且觀察這些數列各項或奇數與偶數項的大小趨勢，並填入下表。

首項	3	3	3	3
公比	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2
大小趨勢				
首項	-3	-3	-3	-3
公比	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2
大小趨勢				



單元一 等比數列(解答)

等比數列的第 n 項公式：

等比數列： $a_n = a_1 \times r^{n-1}$ (r 為公比， $r \neq 0$)

問題一：認識等比數列

(1) 在下列各空格填入適當的數，使得每個數列成為等比數列：

3, 9, 27, 81。

-5, 15, -45, 135。

(2) 請問下列哪些數列是等比數列：(A)(C)(E)

(A) -2, -2, -2, -2, -2

(B) 1, 3, 5, 7, 9

(C) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$

(D) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$

(E) 3, $3 \times (1.1)$, $3 \times (1.1)^2$, $3 \times (1.1)^3$, $3 \times (1.1)^4$

問題二：等比數列的公式與概念

(1) 已知某一等比數列的首項為 10，公比為 -2。求第四項。

(2) 已知某一等比數列的首項為 8，第四項為 1。寫出此數列的前五項。

解答：

(1) \because 等比數列的首項為 10，公比為 -2， \therefore 第 4 項為 $10 \times (-2)^{4-1} = -80$ 。

(2) 設公比為 r ， \because 等比數列的首項為 8，第四項為 1， $\therefore 1 = 8 \times r^3 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$ 。

此數列的前五項為 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$ 。





問題三：數列的大小趨勢

在等差數列的學習中我們發現：

當 $d > 0$ 時， $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$ ，即數列的值越來越大；

當 $d = 0$ 時， $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$ ，即數列的值不變；

當 $d < 0$ 時， $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n$ ，即數列的值越來越小。

在等比數列中，不同的公比，是否數列各項或奇數與偶數項的大小趨勢也有類似的性質呢？

我們透過以下的幾個實際的數列來加以探討：

(1) 試根據以下條件，寫出各等比數列的前五項，並填入下表。

首項	3	3	3	3
公比	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2
前五項	3, 3×2, 3×2 ² , 3×2 ³ , 3×2 ⁴	3, 3× $\frac{1}{2}$, 3× $\frac{1}{2^2}$, 3× $\frac{1}{2^3}$, 3× $\frac{1}{2^4}$	3, 3× $(-\frac{1}{2})$, 3× $(-\frac{1}{2})^2$, 3× $(-\frac{1}{2})^3$, 3× $(-\frac{1}{2})^4$	3, 3×(-2), 3×(-2) ² , 3×(-2) ³ , 3×(-2) ⁴
首項	-3	-3	-3	-3
公比	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2
前五項	-3, -3×2, -3×2 ² , -3×2 ³ , -3×2 ⁴	-3, -3× $\frac{1}{2}$, -3× $\frac{1}{2^2}$, -3× $\frac{1}{2^3}$, -3× $\frac{1}{2^4}$	-3, -3× $(-\frac{1}{2})$, -3× $(-\frac{1}{2})^2$, -3× $(-\frac{1}{2})^3$, -3× $(-\frac{1}{2})^4$	-3, -3×(-2), -3×(-2) ² , -3×(-2) ³ , -3×(-2) ⁴

(2) 並且觀察這些數列各項或奇數與偶數項的大小趨勢，並填入下表。

首項	3	3	3	3
公比	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2
大小趨勢	數列的值 越來越大	數列的值 越來越小	數列奇數項的值越來越小 數列偶數項的值越來越大	數列奇數項的值越來越大 數列偶數項的值越來越小
首項	-3	-3	-3	-3
公比	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2
大小趨勢	數列的值 越來越小	數列的值 越來越大	數列奇數項的值越來越大 數列偶數項的值越來越小	數列奇數項的值越來越小 數列偶數項的值越來越大



觀察上表的數列，令首項為 a ，公比為 r ，一般情形與上表相同：

	$a > 0$	$a < 0$
$r > 1$	數列的值越來越大	數列的值越來越小
$0 < r < 1$	數列的值越來越小	數列的值越來越大
$-1 < r < 0$	數列奇數項的值越來越小 數列偶數項的值越來越大	數列奇數項的值越來越大 數列偶數項的值越來越小
$r < -1$	數列奇數項的值越來越大 數列偶數項的值越來越小	數列奇數項的值越來越小 數列偶數項的值越來越大

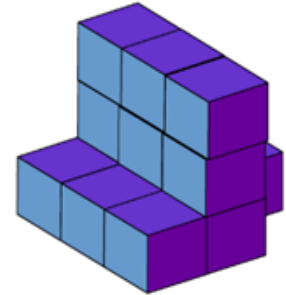




單元二 三視圖

視圖觀察

家駿老師拿著一張照片（如圖）到木工店裡，詢問老師傅能否幫他製作一個跟圖片中一模一樣的立體物。老師傅看著照片許久，開口問了幾個問題？



想一想，如果你是老師傅，可能問哪些問題呢？

任務一：

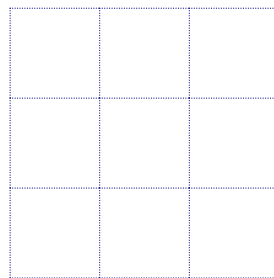
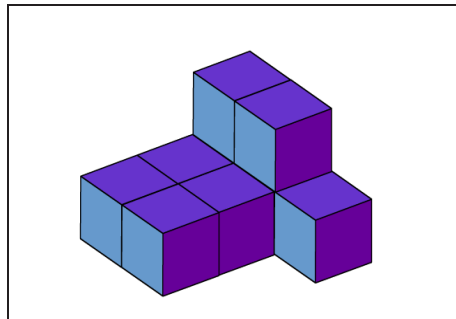
照片中由相同大小的正方體積木組成一個立體圖形，請利用手邊的小積木製作出這個立體圖形。

- (1) 小量用了 13 個積木組成，你能用手邊的小積木做出跟他一樣的立體圖形嗎？
- (2) 小善用了 15 個積木組成，你能用手邊的小積木做出跟他一樣的立體圖形嗎？
- (3) 你還有不同的作法嗎？請與小量、小善做出的立體圖形一起比較，說說看有什麼不同？

只從一個方向來觀察立體圖形，能準確地說明此立體圖形的形狀與大小嗎？

任務二：

請觀察放置於教室中央桌子由相同大小的正方體紙盒組成的立體圖形，從自己的座位站起來由上方俯視此立體圖形，並且將看到的輪廓畫在下面的方格紙上。



每格正方形是用來協助同學觀察時，描繪看到的每個小立方體的面。

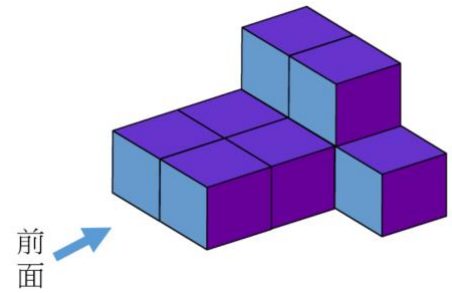
請跟你周圍的同學比較看看，畫的一樣還是不一樣，為什麼？與同學討論你們的想法。





某一方向觀察一個立體圖形時，所看到的平面圖形稱為該立體圖形的**視圖**。由立體圖形的上方俯視該立體圖形所得的視圖，我們稱此輪廓為「**上視圖**」或「**俯視圖**」。

但要注意站在立體圖形的不同方向俯視繪製的「上視圖」會有將此視圖（平面圖形）旋轉的情況，因此一般我們強調「上視圖」是由站在立體圖形的**前面**俯視繪製而成。



任務三：

在任務一中，小量與小善觀察同樣的立體圖形，分別用 13 個積木與 15 個積木製作。請你利用下表幫助小量與小善繪製出立體圖形的上視圖。並與同學討論「上視圖」的好處。

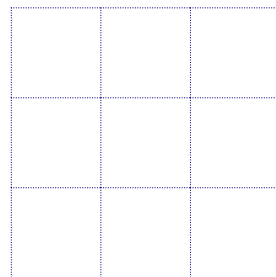
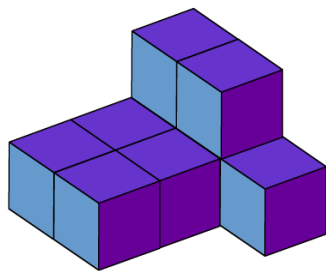
小量	小善



請觀察佈置於教室中央桌子上，由相同大小的正方體紙盒組成的立體圖形，從自己的座位水平方向觀察立體圖形，並且在下面的方格紙畫出看到的輪廓。

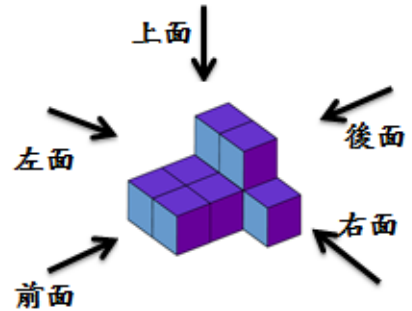
任務四：

請跟你周圍的同學比較看看，畫的一樣還是不一樣，為什麼？與同學討論你們的想法。





觀察一個立體圖形時，觀察者一開始站定的位置即為此立體的前面，由此看到立體的視圖，稱為**前視圖**；觀察者的左方即為左面，從此看到立體的視圖，稱為**左視圖**；觀察者的右方即為右面，從此看到立體的視圖，稱為**右視圖**；從物體的後面看到的視圖，稱為**後視圖**；站在前面從立體的上方向下俯看的視圖，稱為**上視圖**。



由任務四可以發現，從立體圖形不同的水平方向來繪製視圖，都會有一些不一樣。從該立體圖形的前方、後方、左方、右方四個不同方向繪製出來的輪廓，我們分別稱為「前視圖」、「後視圖」、「左視圖」、「右視圖」。因此在討論水平視圖時，需要注意的是從立體圖形的哪個方向觀察。

延續任務四，請將任務四中立體圖形的「前視圖」、「後視圖」、「左視圖」、「右視圖」繪製在下表。

前視圖	左視圖	後視圖	右視圖

任務五：

下圖的立體圖形是由相同大小的小正方體積木組成的。

請小組利用小積木製作出這個立體圖形，並將該立體圖形的「上視圖」、「前視圖」、「後視圖」、「左視圖」、「右視圖」繪製在下表。

			上視圖
前視圖	後視圖	右視圖	左視圖





單元二 三視圖(解答)

任務一：

13 個(後方中間一個)，14 個(後方中間及左邊各一個)，15 個(後方中間一個及左邊疊起來兩個)都是可能的答案，因為藏在立體圖形後方我們無法看見。(1)、(2)是用來協助學生考量不同小積木個數時的答案。

透過學生親手操作教具，更能體會觀察所見與實際立體圖形的差異。

任務二：

在教學過程中可以利用投影機投出不同情況，統計全班各種畫法的人數，並與同學討論前方的意義與不同方向觀察的差異性。

圖一	圖二	圖三	圖四
合理	合理	斜的？有提供九宮格，應不會畫出	尺寸不對
圖五	圖六	圖七	圖八
合理	合理		



跟學生溝通從上方俯視，但是因為大家站的位置不同，雖然看到的是同樣輪廓，突出的地方卻不一樣，相同的形狀，旋轉後產生不同的合理答案，若能溝通好前方、後方、左側、右側的方向再行觀察，答案會比較一致。



任務三：

小量	小蓋

任務四：

1. 在教室中央桌子布置一個用紙箱疊成的形狀（可以考慮用布蓋住或是大紙箱蓋住），請同學從自己的座位水平方向觀察立體圖形，並且畫出看到的輪廓。
2. 任務四與任務二使用同一個立體圖形，與前一個任務不同，是請同學從自己的座位水平視立體圖形，並且畫出看到的輪廓。建議該任務與任務二要在同一節課完成。
3. 不同的方向水平視圖是不一樣的，因此大家不能只從自己的那一面來觀察。

前方	左方	後方	右方

任務五：

			上視圖
前視圖	後視圖	右視圖	左視圖





單元三 空間中的線與平面

直線與平面具無限延伸的特性

【動動腦】

想像一下你手中的筆是直線 AB 的一部分，往兩側無限延伸，會往哪裡去？

想像一下，若你的課本是平面 E 的一部分，那麼，平面 E 往四面八方無限延伸，會是怎樣的情景？



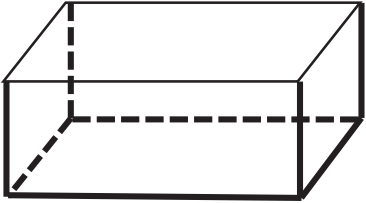
認識長方體與正四面體

☆請老師事先準備長方體與正四面體的骨架實物，供學生觀察並仿作。

【動動手】



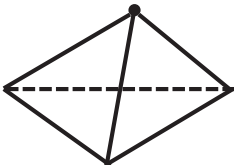
1. 請利用直尺，繪製一個長方體的示意圖與一個正四面體的示意圖。

長方體

示範	練習
步驟一：用直尺畫一個平行四邊形 	
步驟二：在四個端點，加上等長的高 （注意皆為鉛直方向，左後方的為虛線） 	
步驟三：連接底部四個端點，使其為平行四邊形 	



正四面體

示範	練習
步驟一：用直尺畫一個三角形，最上面的邊為虛線 	
步驟二：在上方加一個端點，稍微斜一點 	
步驟三：連接四個端點。 	

2. 利用簡單的工具，製作一個空心的長方體與一個空心的正四面體模型。

提示：可以利用迴紋針將吸管連結、或利用橡皮筋或黏土將免洗筷固定成模型。

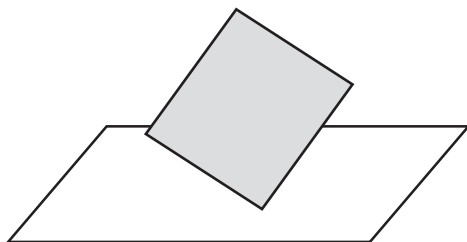
兩相異平面的關係

【動動手】

利用兩把尺，尺扁平的一面為平面的一部分，模擬兩個相異平面相交的狀況，共有那些，請畫出來。

【動動腦】

如圖，小丁說兩平面可以交於一點，你覺得對嗎？





兩相異直線的關係

使用兩支筆代表兩條直線（注意直線可以無限延伸），比比看有哪些關係？
可以交於一點嗎？可以平行嗎？還有其他狀況嗎？

直線與平面垂直

【動動手】

1. 請利用三角板的直角說明長方體的稜邊 AE 與平面 $EFGH$ 垂直。
2. 阿丁手工製作了一個檯燈，工作進行到設定支架，他想確定他的支架是否垂直底面的檯座，請你幫忙想想，如何檢驗呢？
（可以請同學用筆在桌面上模擬檯燈的狀況，另一位同學動手檢驗）





單元三 空間中的線與平面(解答)

學習單多屬操作活動及開放性探索問題，請老師自行斟酌解答。





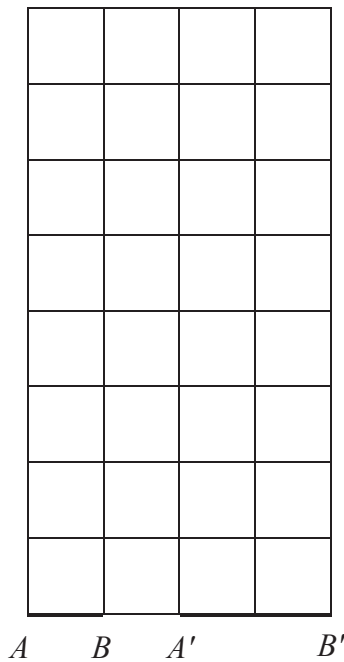
附錄 直角三角形的三角比

一、利用方格紙、直尺與量角器估算 $\tan 75^\circ$ 大約等於多少？

請在下列每格均為 1 公分的方格紙上，依照下列步驟作圖，並回答問題。

步驟（一）：已知 $\overline{AB} = 1\text{cm}$ ，請使用量角器作 $\angle CAB = 75^\circ$ 。

步驟（二）：利用方格紙的格線，作 $\angle CBA = 90^\circ$ ，得到直角 $\triangle ABC$ 。



問題 1：請使用直尺測量 \overline{BC} 的長度為何？

問題 2：根據問題 1 測量的結果，求出 $\tan 75^\circ$ 大約多少？

二、承接上面第一題，重覆上述的作圖步驟。

在方格紙上，另取 $\overline{A'B'} = 2\text{cm}$ ，作 $\angle C'A'B' = 75^\circ$ 、 $\angle C'B'A' = 90^\circ$ ，

得到直角 $\triangle A'B'C'$ 。請回答下列問題：

問題 1：請使用直尺測量 $\overline{B'C'}$ 的長度為何？

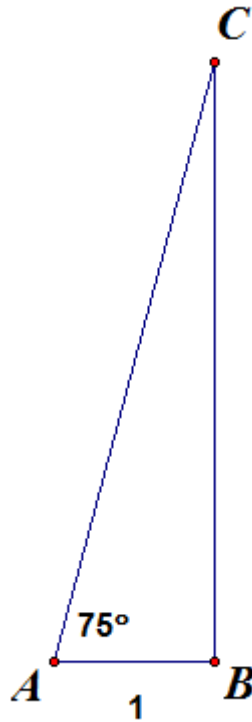
問題 2：根據問題 1 測量的結果，求出 $\tan 75^\circ$ 大約多少？

問題 3：請比較第一、二題，兩次所得到的 $\tan 75^\circ$ 是否差不多呢？你覺得為何會有這樣的結果呢？



三、請在閱讀下列敘述後，求出 $\tan 75^\circ$ 等於多少？

在下圖的直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle CBA = 90^\circ$ 、 $\overline{AB} = 1$ 、 $\angle CAB = 75^\circ$ 。



問題 1：若在上圖中，取 $\angle DAB = 60^\circ$ ，其中 D 點在 \overline{BC} 上，則 \overline{DB} 、 \overline{DA} 的長度分別為何？

問題 2：承問題 1，說明為何 $\overline{DC} = \overline{DA}$ 的理由。

問題 3：根據上述結果，求出 $\tan 75^\circ$ 等於多少？

四、使用計算機算出 \tan 值

問題 1：使用計算機，算出 $\tan 75^\circ$ 大約等於多少？

問題 2：請列出第三、四題，兩次所得到的 $\tan 75^\circ$ ，其結果是兩種完全不一樣形式，你會如何解釋這個現象呢？





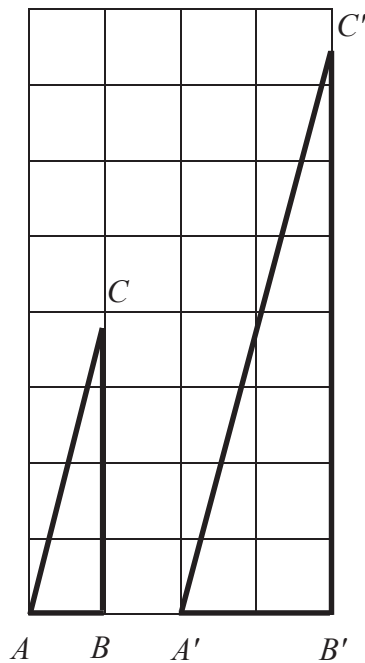
附錄 直角三角形的三角比(解答)

一、利用方格紙、直尺與量角器估算 $\tan 75^\circ$ 大約等於多少？

請在下列每格均為 1 公分的方格紙上，依照下列步驟作圖，並回答問題。

步驟（一）：已知 $\overline{AB} = 1\text{cm}$ ，請使用量角器作 $\angle CAB = 75^\circ$ 。

步驟（二）：利用方格紙的格線，作 $\angle CBA = 90^\circ$ ，得到直角 $\triangle ABC$ 。



問題 1：請使用直尺測量 \overline{BC} 的長度為何？

解答：如上，左圖中， \overline{BC} 大約等於 3.7cm 。

問題 2：根據問題 1 測量的結果，求出 $\tan 75^\circ$ 大約多少？

解答：如上，左圖中， $\tan 75^\circ$ 大約等於 $\frac{3.7}{1} = 3.7$ 。

二、承接上面第一題，重覆上述的作圖步驟。

在方格紙上，另取 $\overline{A'B'} = 2\text{cm}$ ，作 $\angle C'A'B' = 75^\circ$ 、 $\angle C'B'A' = 90^\circ$ ，

得到直角 $\triangle A'B'C'$ 。請回答下列問題：

問題 1：請使用直尺測量 $\overline{B'C'}$ 的長度為何？

解答：如上，右圖中， $\overline{B'C'}$ 大約等於 7.5cm 。



問題 2：根據問題 1 測量的結果，求出 $\tan 75^\circ$ 大約多少？

解答：如上，右圖中， $\tan 75^\circ$ 大約等於 $\frac{7.5}{2} = 3.75$ 。

問題 3：請比較第一、二題，兩次所得到的 $\tan 75^\circ$ 是否差不多呢？你覺得為何會有這樣的結果呢？

解答：

是，大約等於 3.7。

因為在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中， $\angle CAB = 75^\circ = \angle C'A'B'$ 且 $\angle CBA = 90^\circ = \angle C'B'A'$ ，
所以 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (AA 相似)，

得到 $\frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ ，

因此 $\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{A'B'}}$ ，

即 $\tan A = \tan A'$ 。

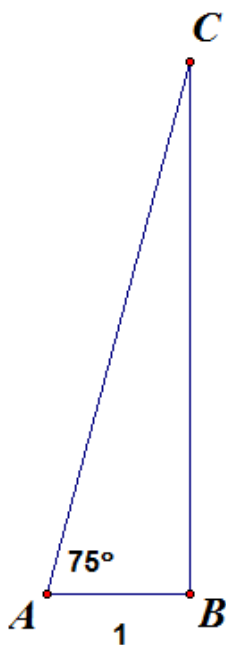
這也說明了，當給定一個直角三角形的一個銳角度數時，雖然它的鄰邊長與對邊長不固定，但是，這個銳角的對邊長與鄰邊長的比值是不變的。

即直角 $\triangle ABC$ 中， $\frac{\text{銳角}\angle A\text{的對邊長}}{\text{銳角}\angle A\text{的鄰邊長}}$ 是一個固定的值。

這個固定的值就是我們在前面教材提過的 $\tan A$ 。

三、請在閱讀下列敘述後，求出 $\tan 75^\circ$ 等於多少？

在下圖的直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle CBA = 90^\circ$ 、 $\overline{AB} = 1$ 、 $\angle CAB = 75^\circ$ 。





問題 1：若在上圖中，取 $\angle DAB = 60^\circ$ ，其中 D 點在 \overline{BC} 上，則

\overline{DB} 、 \overline{DA} 的長度分別為何？

解答：

依右圖，得到 $\triangle ABD$ 是一個 30° 、 60° 、 90° 的直角三角形，所以

$\overline{AB}:\overline{DB}:\overline{DA}=1:\sqrt{3}:2$ ，又 $\overline{AB}=1$ ，得 $\overline{DB}=\sqrt{3}$ ， $\overline{DA}=2$ 。

問題 2：承問題 1，說明為何 $\overline{DC}=\overline{DA}$ 的理由。

解答：

依右圖，在 $\triangle ADC$ 中，因為 $\angle CAD=15^\circ=\angle ACD$ ，所以

$\overline{DC}=\overline{DA}=2$ 。

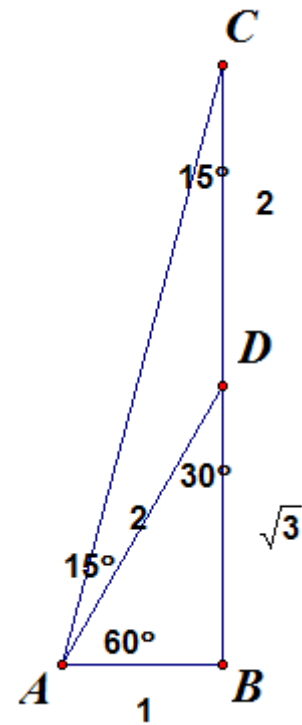
問題 3：根據上述結果，求出 $\tan 75^\circ$ 等於多少？

解答：

依右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle CBA=90^\circ$ ，

$\angle CAB=75^\circ$ ， $\overline{AB}=1$ ， $\overline{CB}=2+\sqrt{3}$ ，

得到 $\tan 75^\circ = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{2+\sqrt{3}}{1} = 2+\sqrt{3}$



四、使用計算機算出 \tan 值

問題 1：使用計算機，算出 $\tan 75^\circ$ 大約等於多少？

解答：利用 google 計算機，算出的結果， $\tan 75^\circ$ 大約等於 3.732。

問題 2：請列出第三、四題，兩次所得到的 $\tan 75^\circ$ ，其結果是兩種完全不一樣形式，你會如何解釋這個現象呢？

解答：在第三題中， $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$ ，在第

四題中， $\tan 75^\circ$ 大約等於 3.732。

其結果一種是根式的形式，另一種是小數的形式。

從 $\sqrt{3}$ 的近似值等於 1.732，可以得知，

$\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$ 的近似值為 3.732。

tan(75度) =

3.73205080757						
⋮	Deg	x!	()	%	AC
Inv	sin	ln	7	8	9	+
π	cos	log	4	5	6	×
e	tan	√	1	2	3	-
Ans	EXP	x ^y	0	.	=	+

√(3) =

1.73205080757						
⋮	Deg	x!	()	%	AC
Inv	sin	ln	7	8	9	+
π	cos	log	4	5	6	×
e	tan	√	1	2	3	-
Ans	EXP	x ^y	0	.	=	+



單元一 等比數列

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

1. 請判斷下列數列哪些是等比數列_____；哪些是等差數列_____。

(請填入代號)

A : 1, -2, 4, -8, 16

B : 3, 3, 3, 3, 3, 3

C : -1, 3, 7, 11, 15

D : $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}$,

E : $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

2. 一等比數列滿足首項 $a_1 = 3$ ，公比 $r = 2$ ，試回答下列兩小題：

(1) 第三項 a_3 等於多少？ (2) $\frac{a_{10}}{a_5}$ 等於多少？



3. 設數列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 為等比數列，已知 $a_1 = 2$ ， $a_2 = 6$ ，試回答下列兩小題：

(1) 公比 r 等於多少？ (2) 第 5 項 a_5 等於多少？

4. 若 50, 80, 130 同減一個數後，可形成等比數列，試求此數的值。



單元一 等比數列(解答)

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

1. 請判斷下列數列哪些是等比數列_____；哪些是等差數列_____。

(請填入代號)

A : 1, -2, 4, -8, 16

B : 3, 3, 3, 3, 3, 3

C : -1, 3, 7, 11, 15

D : $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}$

E : $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

解答：

A : 1, -2, 4, -8, 16 為公比為-2 的等比數列。

B : 3, 3, 3, 3, 3, 3 為公差為 0 的等差數列亦是公比為 1 的等比數列。

C : -1, 3, 7, 11, 15 為公差為 4 的等差數列。

D : $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}$ 為公比為 $\frac{1}{3}$ 的等比數列。

E : $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ 不是等差數列，亦不是等比數列。

2. 一等比數列滿足首項 $a_1 = 3$ ，公比 $r = 2$ ，試回答下列兩小題：

(1) 第三項 a_3 等於多少？ (2) $\frac{a_{10}}{a_5}$ 等於多少？

解答：

(1) $a_3 = a_1 \times 2^2 = 12$ 。 (2) $\frac{a_{10}}{a_5} = \frac{a_1 \times 2^9}{a_1 \times 2^4} = 2^5 = 32$ 。

3. 設數列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 為等比數列，已知 $a_1 = 2$ ， $a_2 = 6$ ，試回答下列兩小題：

(1) 公比 r 等於多少？ (2) 第 5 項 a_5 等於多少？

解答：

(1) $\because a_2 = 6 = a_1 \times r = 2r \Rightarrow r = 3$ 。

(2) $a_5 = a_1 \times r^4 = 2 \times (3)^4 = 162$

4. 若 50, 80, 130 同減一個數後，可形成等比數列，試求此數的值。

解答：

設三數同減去 k 後成為等比數列

$$\Rightarrow 50-k, 80-k, 130-k$$

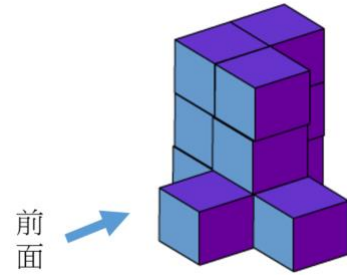
$$\Rightarrow (80-k)^2 = (50-k)(130-k) \Rightarrow k = 5$$



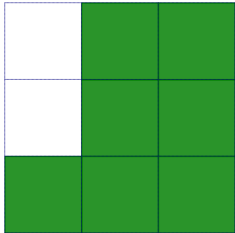
單元二 三視圖

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

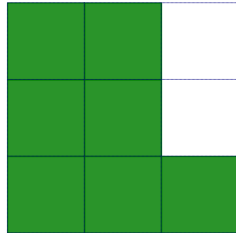
1. 如右圖，下列何者為該立體圖形的前視圖？



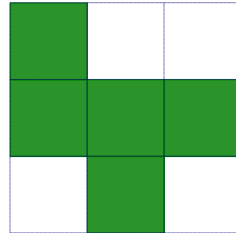
A



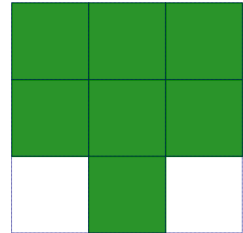
B



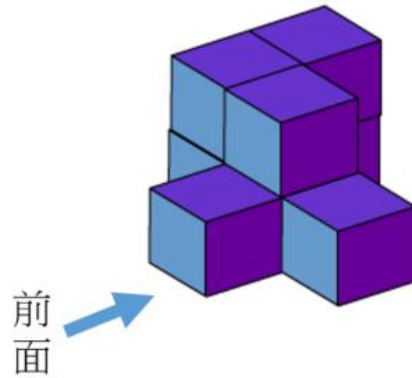
C



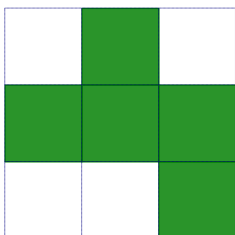
D



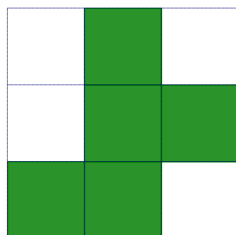
2. 如右圖，下列何者為該立體圖形的上視圖？



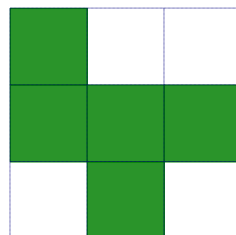
A



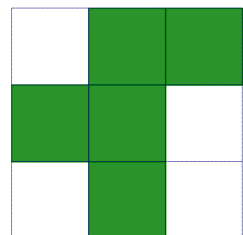
B



C



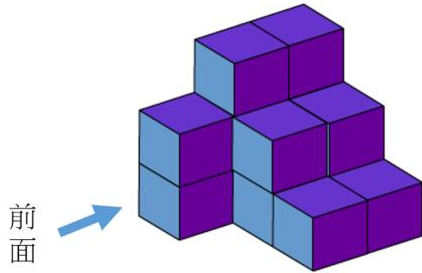
D



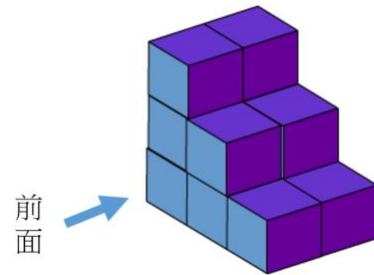


3. 下列哪一個選項的前視圖與其他三個不同？

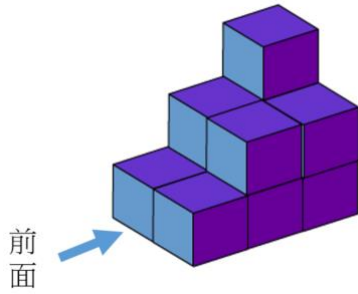
A



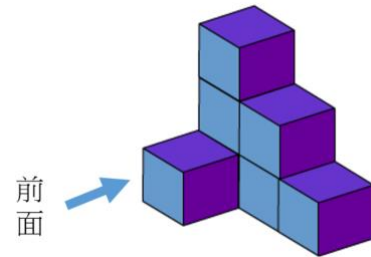
B



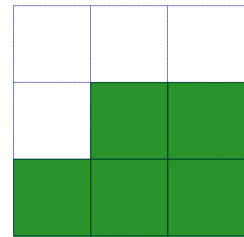
C



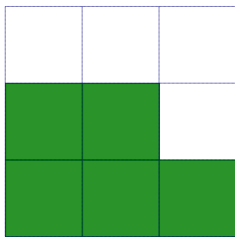
D



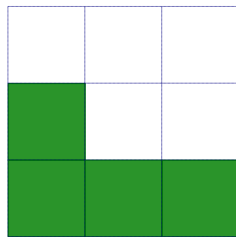
4. 右圖是某立體圖形的前視圖，請問下列何者可能為該立體圖形的後視圖？



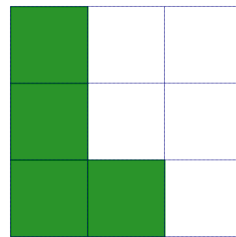
A



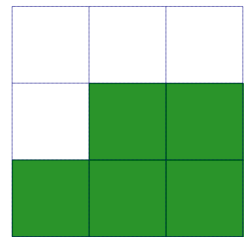
B



C

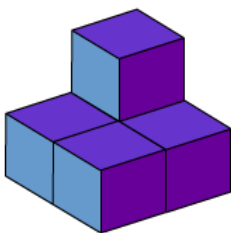


D

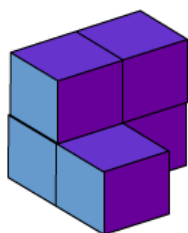


5. 下列哪一個選項的上視圖與其他三個不同？

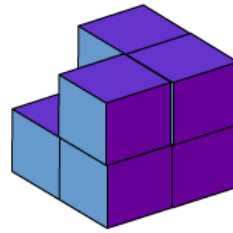
A



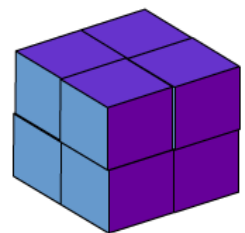
B



C



D

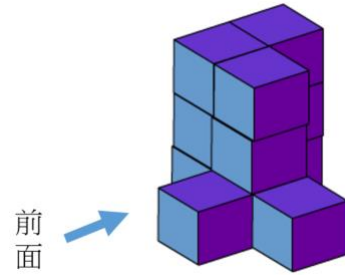




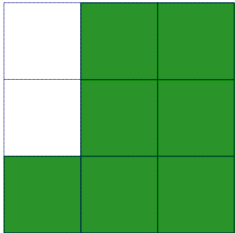
單元二 三視圖(解答)

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

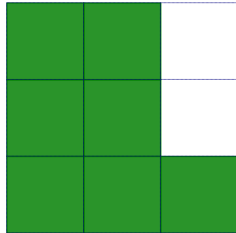
1. 如右圖，下列何者為該立體圖形的前視圖？



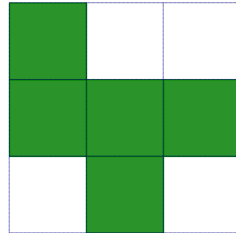
A



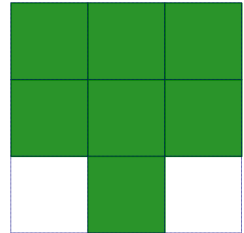
B



C

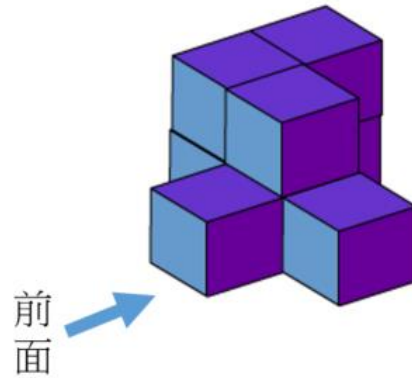


D

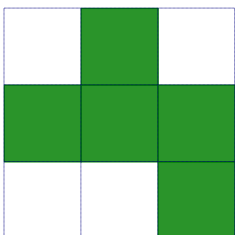


解答：B

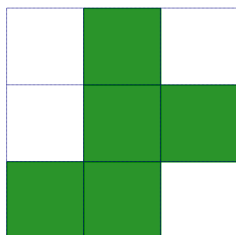
2. 如右圖，下列何者為該立體圖形的上視圖？



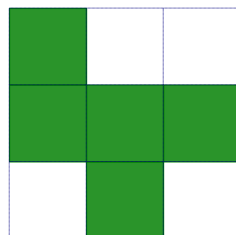
A



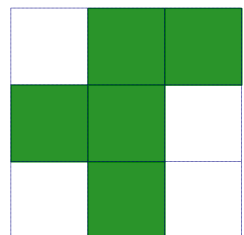
B



C



D

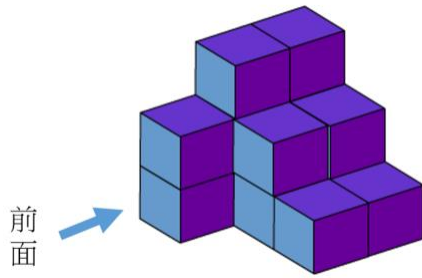


解答：C

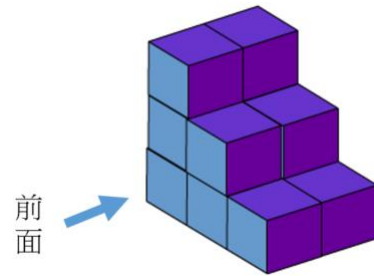


3. 下列哪一個選項的前視圖與其他三個不同？

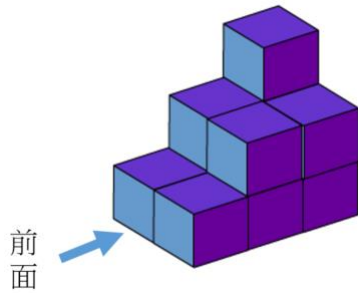
A



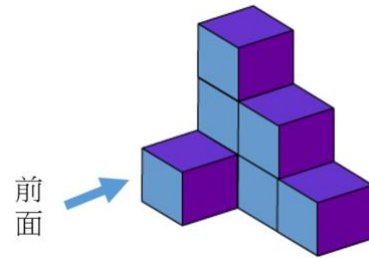
B



C

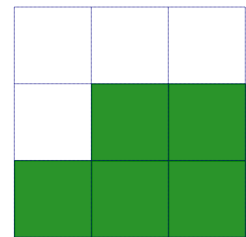


D

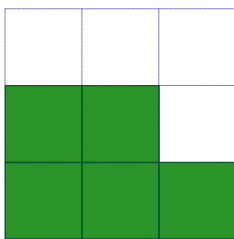


解答：C

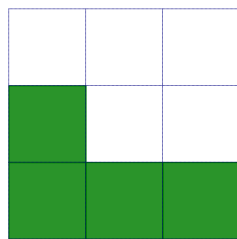
4. 右圖是某立體圖形的前視圖，請問下列何者可能為該立體圖形的後視圖？



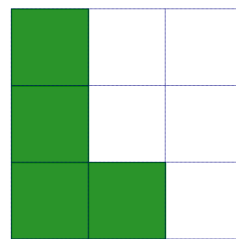
A



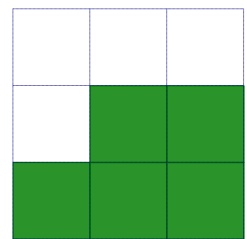
B



C



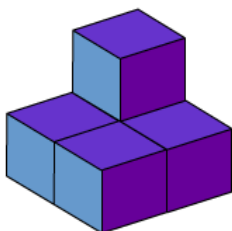
D



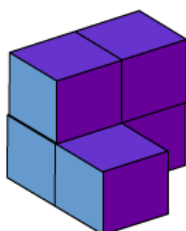
解答：A

5. 下列哪一個選項的上視圖與其他三個不同？

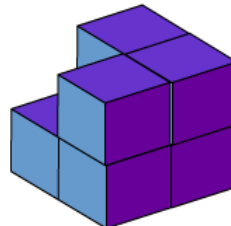
A



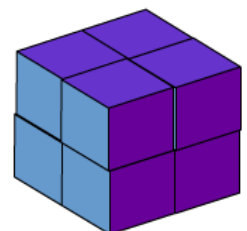
B



C



D



解答：B

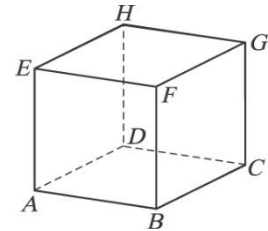


單元三 空間中的線與平面

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

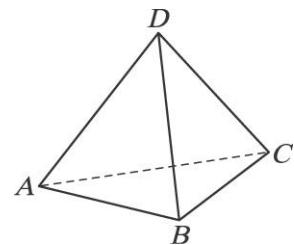
1. 如右圖所示的正立方體中，下列敘述何者是正確的？

- (1) H 、 F 連線平行於底面 $ABCD$ 所在的平面
- (2) 頂點 A 、 B 連線與另一組頂點 G 、 H 連線平行
- (3) 頂點 A 、 E 連線與另一組頂點 C 、 D 連線歪斜
- (4) 頂點 E 、 G 連線與 B 、 C 連線互為歪斜
- (5) A 、 E 連線垂直於底面 $ABCD$ 所在的平面



2. 如右圖所示的正四面體中，下列敘述何者是正確的？

- (1) 稜 AD 與稜 CD 所在的直線交於一點
- (2) 頂點 A 、 B 連線與另一組頂點 C 、 D 連線平行
- (3) 頂點 A 、 B 連線與另一組頂點 C 、 D 連線歪斜
- (4) 平面 ABC 與平面 ABD 互相垂直
- (5) 稜 AD 所在的直線垂直於底面 ABC 所在的平面



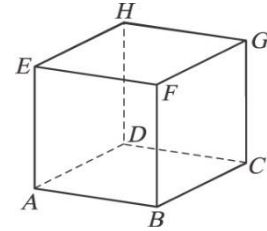


單元三 空間中的線與平面(解答)

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

1. 如右圖所示的正立方體中，下列敘述何者是正確的？

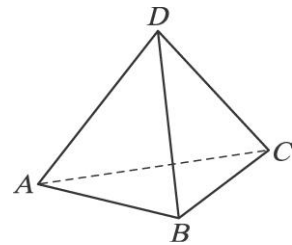
- (1) H 、 F 連線平行於底面 $ABCD$ 所在的平面
- (2) 頂點 A 、 B 連線與另一組頂點 G 、 H 連線平行
- (3) 頂點 A 、 E 連線與另一組頂點 C 、 D 連線歪斜
- (4) 頂點 E 、 G 連線與 B 、 C 連線互為歪斜
- (5) A 、 E 連線垂直於底面 $ABCD$ 所在的平面



解答：(1)(2)(3)(4)(5)

2. 如右圖所示的正四面體中，下列敘述何者是正確的？

- (1) 稜 AD 與稜 CD 所在的直線交於一點
- (2) 頂點 A 、 B 連線與另一組頂點 C 、 D 連線平行
- (3) 頂點 A 、 B 連線與另一組頂點 C 、 D 連線歪斜
- (4) 平面 ABC 與平面 ABD 互相垂直
- (5) 稜 AD 所在的直線垂直於底面 ABC 所在的平面



解答：(1)(3)





附錄 直角三角形的三角比

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} = 10$ 、 $\overline{BC} = 6$ 、 $\overline{AC} = 8$ ，若 $\triangle DEF$ 與 $\triangle ABC$ 相似，求 $\angle D$ 的鄰邊長與 $\angle D$ 對邊長的比值。
2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 為直角，若 $\overline{BC} = 2$ 、 $\overline{AC} = 3$ ，求 $\angle A$ 的鄰邊長與 $\angle A$ 對邊長的比值。
3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 為直角，若 $\overline{AB} = 4$ 、 $\overline{AC} = 3$ ，求斜邊與 $\angle A$ 對邊長的比值。
4. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 為直角，若斜邊： $\angle A$ 對邊長 $= 13:5$ ，求斜邊與 $\angle A$ 鄰邊長的比值。
5. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 為直角，若 $\angle A = 30^\circ$ ，且 $\overline{AB} = 6$ ，求 \overline{AC} 之值。
6. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 為直角，若斜邊： $\angle A$ 對邊長 $= 25:7$ ，且 $\angle A$ 鄰邊長為4，求 \overline{AC} 長。
7. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{CA} = b$ 、 $\overline{AB} = c$ ，若 $(b+c):(c+a):(a+b) = 9:8:7$ ，求 $\angle A$ 的鄰邊長與 $\angle A$ 對邊長的比值。
8. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 為直角，已知 $\angle A$ 的角平分線交 \overline{BC} 於點 D ，若 $\angle A = 45^\circ$ ，求 $\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$ 之值。
9. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C = 90^\circ$ ，若 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ，且 $\overline{AD}:\overline{DB} = 3:2$ ，求 $\angle A$ 的鄰邊長與 $\angle A$ 對邊長的比值。





附錄 直角三角形的三角比(解答)

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=10$ 、 $\overline{BC}=6$ 、 $\overline{AC}=8$ ，若 $\triangle DEF$ 與 $\triangle ABC$ 相似，求 $\angle D$ 的鄰邊長與 $\angle D$ 對邊長的比值。

簡答： $\frac{4}{3}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 為直角，若 $\overline{BC}=2$ 、 $\overline{AC}=3$ ，求 $\angle A$ 的鄰邊長與 $\angle A$ 對邊長的比值。

簡答： $\frac{3}{2}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 為直角，若 $\overline{AB}=4$ 、 $\overline{AC}=3$ ，求斜邊與 $\angle A$ 對邊長的比值。

簡答： $\frac{4}{\sqrt{7}}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 為直角，若斜邊： $\angle A$ 對邊長 $=13:5$ ，求斜邊與 $\angle A$ 鄰邊長的比值。

簡答： $\frac{13}{12}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 為直角，若 $\angle A=30^\circ$ ，且 $\overline{AB}=6$ ，求 \overline{AC} 之值。

簡答： $3\sqrt{3}$

6. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 為直角，若斜邊： $\angle A$ 對邊長 $=25:7$ ，且 $\angle A$ 鄰邊長為4，求 \overline{AC} 長。

簡答： $\frac{7}{6}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{BC}=a$ 、 $\overline{CA}=b$ 、 $\overline{AB}=c$ ，若 $(b+c):(c+a):(a+b)=9:8:7$ ，求 $\angle A$ 的鄰邊長與 $\angle A$ 對邊長的比值。

簡答： $\frac{4}{3}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 為直角，已知 $\angle A$ 的角平分線交 \overline{BC} 於點 D ，若 $\angle A=45^\circ$ ，求 $\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$ 之值。

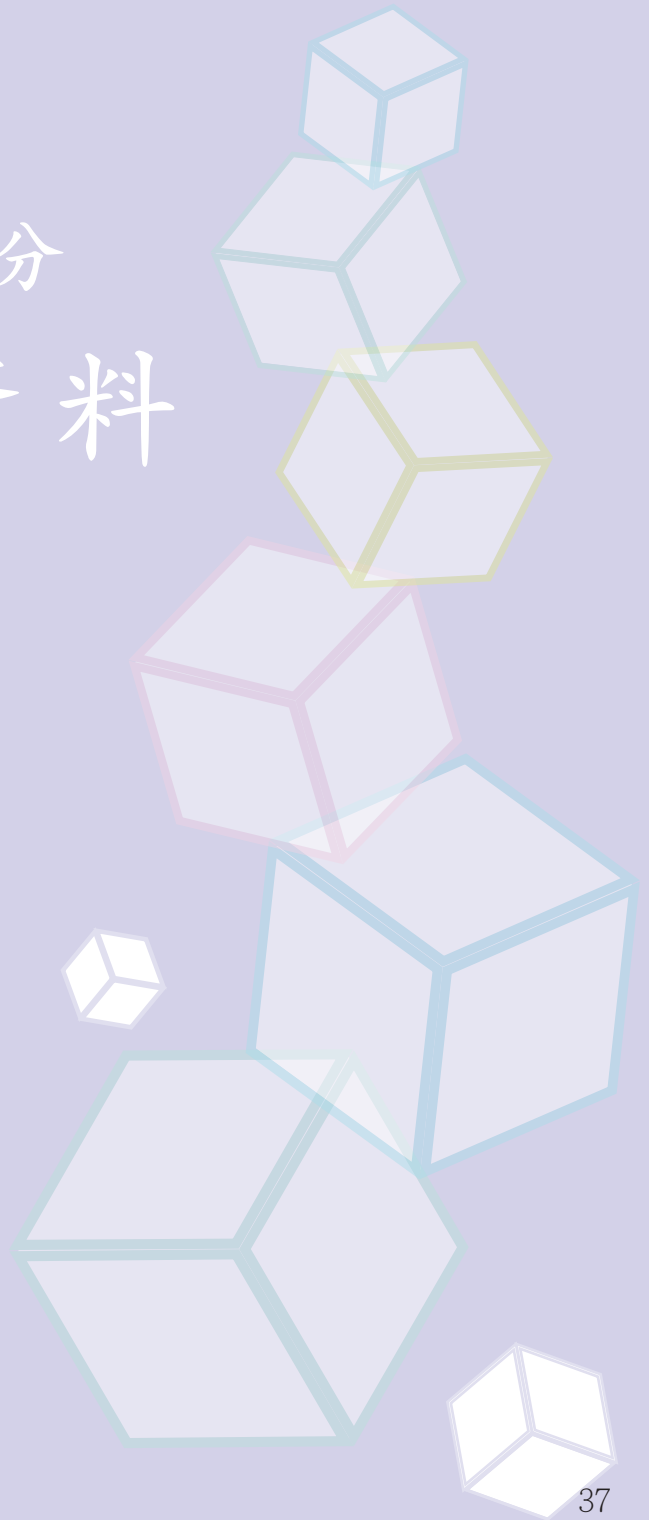
簡答： $\sqrt{2}-1$

9. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C=90^\circ$ ，若 $\overline{CD}\perp\overline{AB}$ ，且 $\overline{AD}:\overline{DB}=3:2$ ，求 $\angle A$ 的鄰邊長與 $\angle A$ 對邊長的比值。

簡答： $\frac{\sqrt{6}}{2}$



第四部分 參考資料

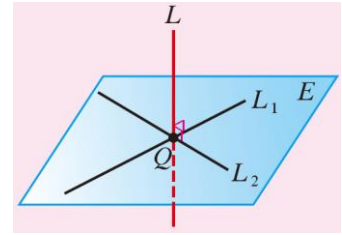




法線定理

直線與平面的垂直

設直線 L 與平面 E 相交於一點 Q ，若直線 L 與平面 E 上通過 Q 點的兩相異直線 L_1, L_2 垂直，則直線 L 與平面 E 垂直。



證明：

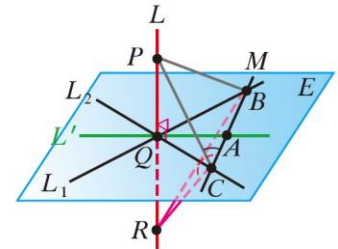
- (1) 在平面 E 上過 Q 任作一直線 L' 。
- (2) 在 L' 上任取一點 A (異於 Q)，並過 A 點任作一直線 M ，使直線 M 交 L_1 於 B 點，交 L_2 於 C 點。

- (3) 於 L 上分別在 Q 點的不同側取 P, R 兩點，且使 $\overline{PQ} = \overline{QR}$ 。

- (4) 因為 $L \perp L_1$ 且 $\overline{PQ} = \overline{QR}$ ，所以 L_1 為 \overline{PR} 的中垂線，故

$$\overline{BP} = \overline{BR}。$$

同理可得 L_2 也為 \overline{PR} 的中垂線，所以 $\overline{CP} = \overline{CR}$ 。



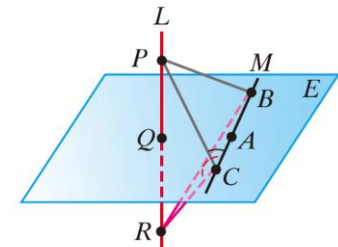
- (5) 在 $\triangle BCP$ 與 $\triangle BCR$ 中，因為 $\overline{BP} = \overline{BR}$ ， $\overline{CP} = \overline{CR}$ ，

$\overline{BC} = \overline{BC}$ ，所以 $\triangle BCP \cong \triangle BCR$ (SSS)，故

$$\angle PCB = \angle RCB，亦即 \angle PCA = \angle RCA。$$

- (6) 在 $\triangle PCA$ 與 $\triangle RCA$ 中，因為 $\overline{CP} = \overline{CR}$ ，
 $\angle PCA = \angle RCA$ ， $\overline{AC} = \overline{AC}$ ，

所以 $\triangle PCA \cong \triangle RCA$ (SAS)，故 $\overline{AP} = \overline{AR}$ 。

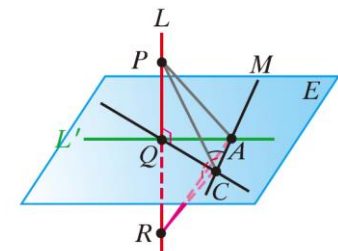


- (7) 在 $\triangle PQA$ 與 $\triangle RQA$ 中，因為 $\overline{AP} = \overline{AR}$ ， $\overline{PQ} = \overline{QR}$ ，

$\overline{QA} = \overline{QA}$ ，所以 $\triangle PQA \cong \triangle RQA$ (SSS)，故

$$\angle PQA = \angle RQA = 90^\circ，即 L \perp L'。$$

- (8) 因為 L 垂直平面 E 上的任一直線 L' ，所以直線 L 與平面 E 垂直。



「銜接教材」編輯小組

數學學科中心主任 徐建國校長

數學學科中心執行秘書 蔡哲銘主任

教材編輯主持人 國立臺灣師範大學陳界山教授

教材編輯教師 李文傑、吳汀菱、吳秉鋒、林信安、桂舒嫻、曾明德、曾俊雄、
鄧家駿、蔡韋弘老師

助理編輯 侯以修、劉巧璇

審查委員 國立臺南大學葉啟村教授

臺北市立三民國民中學莊國彰校長

臺北市立建國高級中學曾政清老師

國立高雄師範大學附屬高級中學歐志昌老師

國立政治大學附屬高級中學賴政泓老師

教育部普通高級中學課程數學學科中心(臺北市立建國高級中學)

地址：[10066]臺北市中正區南海路 56 號

聯絡電話：(02)2303-4381 轉 212

e-mail：mathcenter@ck.tp.edu.tw

網址：http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/

出版日期：107 年 9 月