

題目(習
作單元 II
第 8 題)

8. 已知三次函數 $y = x^3 + bx^2 + cx + 1$ 圖形的對稱中心為 $(1, 8)$ ，求實數 b, c 的值。

同學 A 提供第 1 種解法(比較係數)

$$y = (x-1)^3 + k(x-1) + 8$$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + kx - k + 8$$

$$8 - 1 - k = 1 \quad k = 6 \text{ 代入得 } 3x + 6x = 6x \quad ; \quad c = 9$$

$$-3x^2 = 6x^2 \quad b = -3$$

∴ $\begin{cases} b = -3 \\ c = 9 \end{cases}$

同學 B 提供第 2 種解法(找對稱中心)

$$\begin{array}{r} 1 + b + c + 1 \\ + 1 + (b+1) + (b+c+1) \\ \hline 1 + (b+1) + (b+c+1) + (b+c+2) \\ 1 + (b+2) \\ \hline 1 + (b+2) + (2b+c+3) \\ + 1 \\ \hline 1 + (b+3) \end{array}$$

∵ 對稱為 1，沒有平方項

$$b + 3 = 0 \quad b = -3$$

$$b + c + 2 = 8$$

$$b + c = 6, \quad c = 9$$

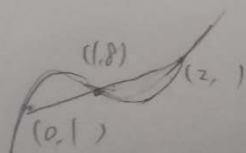
同學 C 提供第 3 種解法(對稱性)

$$y = x^3 + bx^2 + cx + 1 \quad \text{對稱中心}(1, 8)$$

x	0	1	2
y	1	8	4b+2c+9

$$\begin{cases} 1 + 4b + 2c + 9 = 16 \\ 1 + b + c + 1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b + 2c = 6 \\ b + c = 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2b &= -6 \\ b &= -3 \\ c &= 9 \end{aligned}$$



同學 D 提供第 3 種解法(對稱性)

法二

$$y = f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1$$

$$f(0) = 1$$

$$f(2) = 8 + 4b + 2c + 1$$

$$f(-1) = -1 + b - c + 1$$

編者謹識

$$f(3) = 27 + 9b + 3c + 1$$

$$\frac{f(0) + f(2)}{2} = 8 = \frac{f(-1) + f(3)}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b + c = 3 \\ 5b + c = -6 \end{cases} \Rightarrow b = -3, c = 9$$

第一段落有 22、19、28 及 23 號等同學答對可獲得 5 分^{註 1}，一個下課就有這麼多同學響應，真令人高興！

第二段落 22 號同學最早答對可獲得 8 分，另 23 號同學也答對但較晚傳給我，給予 5 分獎勵；8 號及 32 號同學也有嘗試但皆與第 2 種解法相同(非第 3 種方法)，為鼓勵勇於嘗試精神，2 人皆給予 3 分獎勵。

法國藝術家羅丹說：這世界充滿美麗，只是缺少發現^{註 2}，多元思考是數學美麗的一部份，為師希望各位同學未來都能學著面對問題思考，且有勇氣嘗試不同的思考模式就會讓你(妳)領略到 AHA 的快樂！(第三種方法是從幾何圖形的對稱性出發解題，很漂亮)

註 1、22 號芊蓉說 1 號王同學有協助她完成第 2 種方法，為獎勵他樂於助人的精神，加 3 分；13 號瑋鈞同學雖僅提供 1 種方法，為鼓勵他勇於嘗試的精神，加 3 分。

註 2、Beauty is everywhere. It is not that she is lacking to our eye, but our eyes which fail to perceive her.—Auguste Rodin