4. 將 $y=\sin x$ 向右平移 $\frac{1}{2}$ 單位再沿水平方向伸縮 3 倍後得函數為 $y=\sin(ax+b)$，則數對 $(a,b)=$ ___$(\frac{1}{3},-\frac{1}{2})$___ 。

【概念中心】正弦函數的伸縮平移

【解析】將 $y=\sin x$ 向右平移 $\frac{1}{2}$ 單位，得 $y=\sin(x-\frac{1}{2})$，

再水平方向伸縮 3 倍，得 $y=\sin(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2})$，

故 $(a,b)=(\frac{1}{3},-\frac{1}{2})$。

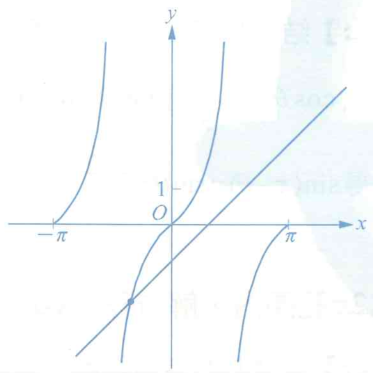
5. 已知 $-\pi\le x\le\pi$，則方程式 $\tan x=x-1$ 的實根個數有___1___個。

【概念中心】正切函數的圖形

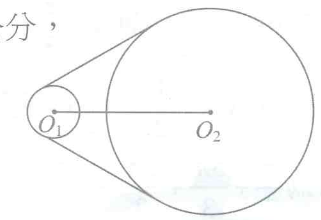
【解析】由圖知，

$y=\tan x$ 與 $y=x-1$ 於 $-\pi\le x\le\pi$ 時，僅有一個交點，

即只有一個實根。




★6. 如右圖，兩輪的半徑分別為 2 公分與 8 公分，圓心相距 12 公分，有一皮帶繞此兩輪相互帶動且皮帶不交叉，則皮帶的長度為___$12\sqrt{3}+12\pi$___公分。




【概念中心】分析圖形並結合扇形、弧長公式應用解決問題

素養題

【解析】作圖如右，已知 $\overline{O_2P}=8-2=6$，

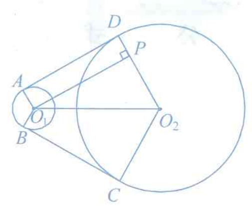
外公切線段長 $\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{O_1P}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$，

直角 $\triangle O_1O_2P$ 中，$\angle PO_1O_2=30^\circ$，$\angle PO_2O_1=60^\circ$，

劣弧 $\overset{\frown}{AB}=2\pi\times2\times\frac{120}{360}=\frac{4\pi}{3}$（$\because \angle AO_1B=120^\circ$），

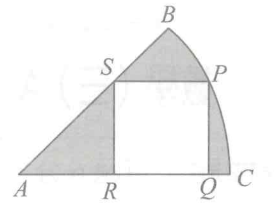
優弧 $\overset{\frown}{CD}=2\pi\times8\times\frac{240}{360}=\frac{32\pi}{3}$（$\because \angle CO_2D=120^\circ$），

因此，長度為 $2\times6\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}+\frac{32\pi}{3}=12\sqrt{3}+12\pi$（公分）。




## 四、計算題：共 20 分

1. 某扇形公園 $ABC$ 如右圖，在此公園內規劃一個正方形 $PQRS$ 區域作裝置藝術，即正方形 $PQRS$ 內接於扇形，其餘灰色部分為草皮區域。已知扇形公園 $ABC$ 的圓心角為 $\frac{\pi}{4}$，且半徑為 20公尺，試問：




(1) 此裝置藝術區域的周長為多少公尺？（5 分）

(2) 此草皮區域的面積為多少平方公尺？（5 分）

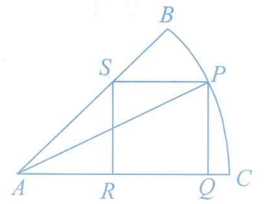
【解】(1) 連接 $\overline{AP}$，$\overline{AP}=20$，令 $\overline{PQ}=x$，則 $\overline{SR}=\overline{RQ}=\overline{AR}=x$，

由畢氏定理 $x^2+(2x)^2=20^2\Rightarrow x=4\sqrt{5}$，

所以此藝術區域的周長為 $4\times4\sqrt{5}=16\sqrt{5}$（公尺）。

(2) 草皮區域面積為（扇形 $ABC$）－（正方形 $PQRS$）

$=\frac{1}{2}\times20^2\times\frac{\pi}{4}-(4\sqrt{5})^2=50\pi-80$（平方公尺）。




【概念中心】弧長與面積的應用

★2. 生物學家長期觀察某種野生水牛，綜合地理、人文、生物性等各種觀察資料後，發現其族群數量呈現一種週期函數，並將其族群數量定義為 $P(t)=400+250\sin(\frac{\pi t}{2})$ 且 $t\ge0$，其中 $t$ 為科學家開始觀察後的時間(以年為單位)，例如：$t=1$ 代表一年，而 $P(1)$ 為一年後觀察到的水牛數量。就函數 $P(t)=400+250\sin(\frac{\pi t}{2})$ 回答以下問題：

(1)「最初」觀察時，該水牛數量為多少隻？（2 分）

(2) 兩年後，該水牛數量為多少隻？（2 分）

(3) 由此函數的週期性可知，水牛數量在不同時期呈現不同的增減趨勢，試問該族群數量的最小值為多少隻？（3 分）

(4) 承第(3)小題，之後每經過 $k$ 年，數量又再次回到最小值，試問最小正整數 $k$ 為多少？（3 分）

素養題

【解】(1) $t=0$ 代入 $P(t)$，$P(0)=400$(隻)。

(2) $t=2$ 代入 $P(t)$，$P(2)=400$(隻)。

(3) $t=3$ 時，$\sin(\frac{\pi t}{2})$ 有最小值 $-1$，即此時 $P(t)$ 有最小值 $P(3)=150$(隻)。

(4) $\sin(\frac{\pi t}{2})=-1\Rightarrow\frac{\pi t}{2}=2n\pi+\frac{3\pi}{2}\Rightarrow t=4n+3$（$n$ 為整數），

每隔 4 年就出現最小值，所以 $k=4$。

【概念中心】將函數 $y=\sin x$ 與實例結合並分析出週期與最大值最小值的實際意義