## 一、單一選擇題：每題 6 分，共 12 分

( B ) 1. 求 $\sin 168^\circ \sin 58^\circ + \cos 168^\circ \sin 42^\circ =$

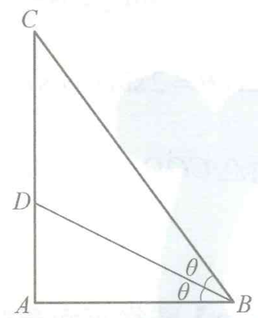
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【概念中心】三角函數的和差角公式

【解析】原式 $= \sin 168^\circ \cos 42^\circ + \cos 168^\circ \sin 42^\circ = \sin(168^\circ + 42^\circ) = \sin 210^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$，

故選(B)。

( D ) 2. 如右圖，一直角三角形△$ABC$，$\angle A = 90^\circ$，若 $D$ 在 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{BD}$ 為 $\angle ABC$ 的角平分線，已知 $\overline{AB} = 21$，$\overline{AD} = 15$，則 $\overline{CD}$ 長為下列哪一個選項？




(A) $\frac{245}{4}$ (B) $\frac{225}{4}$ (C) $\frac{205}{4}$ (D) $\frac{185}{4}$ (E) $\frac{165}{4}$

【概念中心】三角函數的二倍角公式

【解析】由△$ABD$，$\tan\theta = \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{35}{12}$，

又△$ABC$ 中 $\tan 2\theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{35}{12} = \frac{\overline{AC}}{21} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{245}{4}$，

故 $\overline{CD} = \overline{AC} - \overline{AD} = \frac{245}{4} - 15 = \frac{185}{4}$，

故選(D)。

## 二、多重選擇題：每題 10 分，共 20 分

( A D E ) 3. 關於函數 $y = f(x) = \frac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x)$ 的圖形，下列敘述哪些是正確的？

(A) $y = f(x)$ 的週期為 $\pi$ (B) $y = f(x)$ 的振幅為 2 (C) $y = f(x)$ 對稱於原點
(D) $y = f(x)$ 的圖形與 $y$ 軸交點為 $(0, \frac{1}{2})$ (E) $y = f(x)$ 的圖形與 $x$ 軸有無限多個交點

【概念中心】三角函數的疊合及 $y = a\sin x + b\cos x$ 的性質

【解析】原式 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{4}\sin 2x + \sin\frac{\pi}{4}\cos 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$。

(A)(B) 由 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 可知週期為 $\pi$，且振幅為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。

(C) $f(x)$ 圖形不通過原點，故不可能對稱原點。

(D) $x = 0$ 時，$f(0) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$，故與 $y$ 軸交點為 $(0, \frac{1}{2})$。

(E) $f(x) = 0 \Rightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = n\pi$，$n$ 為整數

$\therefore x$ 有無限多個解

故選(A)(D)(E)。

( B C ) 4. 設 $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$，$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$，已知 $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$，$\sin(\alpha - \beta) = -\frac{33}{65}$，試問下列哪些選項正確？

(A) $\cos\beta = \frac{5}{13}$ (B) $\cos 2\beta = -\frac{119}{169}$ (C) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ (D) $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ (E) $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$

【概念中心】三角函數的和差角公式應用

【解析】由 $\sin\alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$，又 $\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{3\pi}{2}$，

且 $\sin(\alpha - \beta) = -\frac{33}{65}$ 可知 $\alpha - \beta$ 為第三象限角，

因此 $\cos(\alpha - \beta) = -\sqrt{1 - \sin^2(\alpha - \beta)} = -\frac{56}{65}$（$\because$ $\alpha - \beta$ 為第三象限角，所以取負）。

(A) $\cos\beta = \cos[\alpha - (\alpha - \beta)] = \cos\alpha\cos(\alpha - \beta) + \sin\alpha\sin(\alpha - \beta) = \frac{4}{5} \times \frac{-56}{65} + \frac{-3}{5} \times \frac{-33}{65} = \frac{-5}{13}$。

(B) $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = 2 \times (\frac{-5}{13})^2 - 1 = \frac{50}{169} - 1 = -\frac{119}{169}$。

(C) $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$（$\because \frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ $\therefore$ 取正）。

(D) $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$（$\because \frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ $\therefore$ 取負）。

(E) $\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = \pm\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$（$\because \frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ $\therefore$ 取負）。

故選(B)(C)。

## 三、填充題：每格 8 分，共 48 分

1. 求 $\cos 105^\circ =$ $\underline{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$。

【概念中心】三角函數的和差角公式

【解析】$\cos 105^\circ = \cos(45^\circ + 60^\circ) = \cos 45^\circ\cos 60^\circ - \sin 45^\circ\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$。

2. 已知 $a = \sin 55^\circ$，$b = \cos 65^\circ$，則 $ab + \sqrt{1-a^2} \times \sqrt{1-b^2} =$ $\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$。

【概念中心】三角函數的和差角公式應用

【解析】所求 $= \sin 55^\circ\cos 65^\circ + \cos 55^\circ\sin 65^\circ = \sin(55^\circ + 65^\circ) = \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$。