3. 設直線 $L_1:3x-y+6=0$ ，$L_2:x-3y+4=0$ ，設兩直線的夾角為 θ，則 $\sin\theta=$ $\underline{\frac{4}{5}}$ 。

【概念中心】利用 $\tan\theta$ 的和差角公式求兩直線的夾角

【解析】假設 L_1 與 L_2 的斜角分別為 α 與 β ，則 $\tan\alpha=3$ 且 $\tan\beta=\frac{1}{3}$ ，

而兩直線一夾角 $\phi=\alpha-\beta$ ， $\tan\phi=\dfrac{3-\frac{1}{3}}{1+3\times\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}$ ，

$\theta=\phi$ 或 $\pi-\phi\Rightarrow\sin\theta=\sin\phi=\frac{4}{5}$ 。

★4. 設 $\theta\in\mathbb{R}$，則 $f(\theta)=\sin\theta\cos\theta-\sin\theta-\cos\theta+1$ 的最大值為 $\underline{\frac{3+2\sqrt{2}}{2}}$ 。

【概念中心】利用三角函數的疊合求函數的最大值

【解析】令 $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$ ，得 $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$ ，

平方得 $t^2=1+2\sin\theta\cos\theta\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$ ，

得 $f(\theta)=\frac{1}{2}(t^2-1)-t+1=\frac{1}{2}(t-1)^2$ ，

故當 $t=-\sqrt{2}$ 時， $f(\theta)$ 有最大值 $\frac{1}{2}(-\sqrt{2}-1)^2=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ 。

5. 求 $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos15^\circ}+\dfrac{1}{\sin15^\circ}=$ $\underline{4\sqrt{2}}$ 。

【概念中心】利用三角函數的疊合化簡式子

【解析】原式 $=\dfrac{\sqrt{3}\times\sin15^\circ+1\times\cos15^\circ}{\cos15^\circ\sin15^\circ}=\dfrac{2\times(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin15^\circ+\frac{1}{2}\times\cos15^\circ)}{\frac{1}{2}\times2\cos15^\circ\sin15^\circ}$

$=\dfrac{2(\sin60^\circ\times\sin15^\circ+\cos60^\circ\times\cos15^\circ)}{\frac{1}{2}\sin30^\circ}$

$=\dfrac{2(\cos(60^\circ-15^\circ))}{\frac{1}{2}\sin30^\circ}=\dfrac{2\cos45^\circ}{\frac{1}{4}}=4\sqrt{2}$ 。

★6. 已知 $\sin x=0.61$ ， $\sin\theta=0.39$ ，則 $\sin(2\theta+x)-2\sin(\theta+x)\cos\theta=$ $\underline{-0.61}$ 。

【概念中心】利用三角函數的和差角公式化簡式子

【解析】原式 $=\sin[(\theta+x)+\theta]-2\sin(\theta+x)\cos\theta$

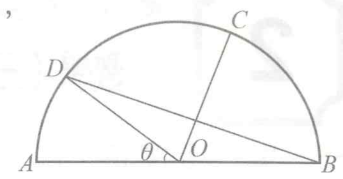
$=\sin(\theta+x)\cos\theta+\cos(\theta+x)\sin\theta-2\sin(\theta+x)\cos\theta$

$=-\sin(\theta+x)\cos\theta+\cos(\theta+x)\sin\theta$

$=-\sin[(\theta+x)-\theta]=-\sin x=-0.61$ 。

四、計算題：每題 10 分，共 20 分

★1. 右圖為某半圓形廣場的平面圖，廣場直徑 $\overline{AB}=100$(公尺)， $\overline{BD}=80$(公尺)，為響應元宵節活動，欲在此半圓形廣場規劃甲、乙兩個展區，分別為圖中的 $\triangle COD$ ， $\triangle AOD$ ，其餘規劃為草皮，已知 $\overset{\frown}{AD}$ 弧長為 $\overset{\frown}{CD}$ 弧長的一半，設 $\angle AOD=\theta$ $(30^\circ<\theta<60^\circ)$，試問甲展區與乙展區的面積比為何？(即 $\triangle COD$ ： $\triangle AOD$) 素養題

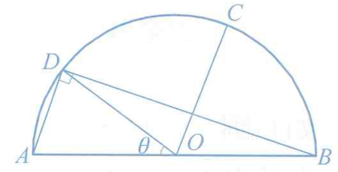


【解】 $\because$ $\overline{AB}$ 為直徑 $\therefore$ $\angle ADB=90^\circ$

而 $\angle ABD=\frac{\theta}{2}$ ， $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}\Rightarrow\sin\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$ ，

連接 $\overline{AD}$ ， $\overset{\frown}{AD}$ 弧長為 $\overset{\frown}{CD}$ 弧長的一半，

所以 $\angle COD=2\theta$ ，



$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$ ， $\cos\theta=\frac{7}{25}$ ，

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{24}{25}\times\frac{7}{25}=\frac{336}{625}$ ，

而 $\triangle COD$ ： $\triangle AOD=\frac{1}{2}\times r\times r\times\sin\theta:\frac{1}{2}\times r\times r\times\sin2\theta$

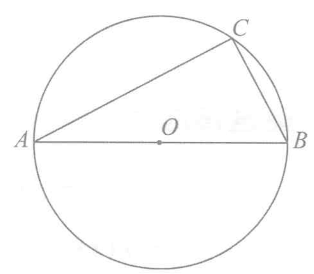
$=\sin\theta:\sin2\theta=25:14$ 。(或由 $1:2\cos\theta=1:\frac{14}{25}=25:14$ 。)

【概念中心】能從平面圖形分析出面積比，並進一步利用三角函數的倍半角公式與面積公式求解

2. 一圓的直徑 $\overline{AB}=10$，圓上有一動點 C ，試問：

(1) $5\overline{AC}+12\overline{BC}$ 的最大值為多少？ (5 分)

(2) $\triangle ABC$ 面積的最大值為多少？ (5 分)



【解】由直徑知 $\angle ACB=90^\circ$，而 $\overline{AC}=10\cos A$ ， $\overline{BC}=10\sin A$ ，

(1) $5\overline{AC}+12\overline{BC}=50\cos A+120\sin A=130\sin(A+\theta)\le130$ ，

當 $\sin(A+\theta)=1$ 時， $5\overline{AC}+12\overline{BC}$ 有最大值 130。

(2) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times10\cos A\times10\sin A=25\sin2A\le25$ ，

當 $\sin2A=1$ 時， $\triangle ABC$ 面積有最大值 25。

【概念中心】利用三角函數的疊合求得最大值