

一、單一選擇題：每題 6 分，共 12 分

(E) 1. 設 $a=3^{0.4}$ ， $b=9^{0.3}$ ，試問下列哪一個選項的值最大？

- (A) a (B) b (C) ab (D) a^2 (E) b^2

【概念中心】利用指數函數的單調性質比大小

【解析】因底數 $3 > 1$ ，指數越大者值越大，將每個選項化為以 3 為底的指數再比較指數大小，
 $b = 9^{0.3} = 3^{0.6}$ ， $ab = 3^{0.4} \times 3^{0.6} = 3^1$ ， $a^2 = (3^{0.4})^2 = 3^{0.8}$ ， $b^2 = (3^{0.6})^2 = 3^{1.2}$ ，
 故選(E)。

(B) 2. 設實數 x 且 $1 < x < 3$ ，試問使 $3^x + 3^{\frac{1}{2}}$ 為整數的所有實數 x 值有多少個？

- (A) 23 (B) 24 (C) 25 (D) 26 (E) 27

【概念中心】利用指數性質估計數值大小

【解析】由 $1 < 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} < 2 \cdots \cdots$ ①，

又 $1 < x < 3 \Rightarrow 3 < 3^x < 27 \cdots \cdots$ ②，

①+②得 $4 < 3^x + 3^{\frac{1}{2}} < 29$ ，即 $3^x + 3^{\frac{1}{2}} = 5, 6, \dots, 28$ ，共 24 個，
 故選(B)。

二、多重選擇題：每題 10 分，共 20 分

(BC) 3. 關於函數 $f(x) = a^x$ ， $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，下列選項何者正確？

E (A) 函數 $f(x)$ 的圖形必為由左而右上升的曲線

(B) 函數 $f(x)$ 的圖形必在 x 軸上方

(C) 若 $x_1 \neq x_2$ ，則 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

(D) 若函數 $f(x)$ 的圖形與直線 $y = x$ 有交點，則 $0 < a < 1$

(E) 若將函數 $f(x)$ 的圖形向上平移 π 單位得一新圖形，則直線 $y = \pi$ 為新圖形的漸近線

【概念中心】指數函數的圖形與其性質

【解析】(A) 當 $a > 1$ 時，圖形為左而右上升的曲線。

當 $0 < a < 1$ 時，圖形為左而右下降的曲線。

(B) $\because a > 0, a \neq 1 \therefore$ 對於任意實數 x ， $f(x) > 0$ ，故圖形恆在 x 軸上方。

(C) 因為指數函數 $y = 2^x$ 的圖形凹口向上，所以 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 恆成立。

(D) 取 $a = 1.1$ ，令 $g(x) = 1.1^x - x$ ，則 $g(1) > 0$ 且 $g(2) < 0$ ，
 $\Rightarrow y = 1.1^x$ 與 $y = x$ 在 $1 < x < 2$ 之間有交點。

(E) 函數 $f(x) = a^x$ 上移 π 單位後得新圖形 $g(x) = a^x + \pi$ ，
 漸近線也向上移 π 單位得新圖形的漸近線為 $y = \pi$ 。

故選(B)(C)(E)。

(AB) 4. 下列哪些函數的圖形與直線 $x + y = 0$ 恰有一個交點？

- E (A) $y = 4^x$ (B) $y = 2^{x+1}$ (C) $y = 2^{-x}$ (D) $y = -2^x$ (E) $y = 2^{-|x|}$

【概念中心】指數函數的基本圖形與其他變形圖形

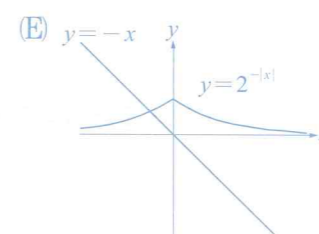
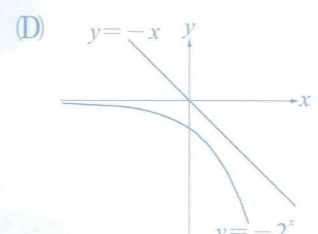
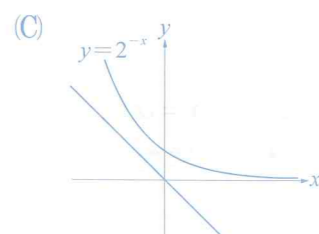
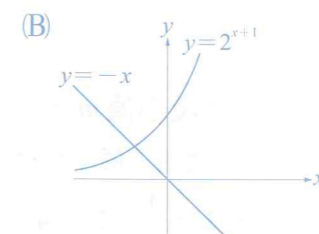
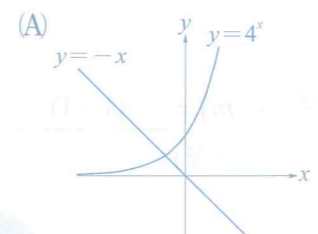
【解析】(B) 將 $y = 2^x$ 的圖形向左移動一個單位的圖形即 $y = 2^{x+1}$ 。

(C) 作 $y = 2^x$ 對 y 軸的對稱圖形得 $y = 2^{-x}$ 。

(D) 作 $y = 2^x$ 對 x 軸的對稱圖形得 $y = -2^x$ 。

(E) $y = 2^{-|x|} = \begin{cases} 2^{-x}, & x \geq 0 \\ 2^x, & x < 0 \end{cases}$ 。

作圖，



故選(A)(B)(E)。

三、填充題：每格 8 分，共 48 分

1. 已知將指數函數 $y = 7^x$ 的圖形沿鉛直方向伸縮 a 倍，可得函數 $y = 7^{x+2}$ 的圖形。將指數函數 $y = 7^x$ 的圖形沿水平方向伸縮 b 倍可得到 $y = (\sqrt{7})^x$ 的圖形，則數對 (a, b) 為 (49, 2)。

【概念中心】指數函數的圖形及其伸縮平移

【解析】將指數函數 $y = 7^x$ 的圖形沿鉛直方向伸縮 a 倍得 $y = a \times 7^x$ ，
 由 $a \times 7^x = 7^{x+2} = 49 \times 7^x \Rightarrow a = 49$ 。

將指數函數 $y = 7^x$ 的圖形沿水平方向伸縮 b 倍得 $y = 7^{\left(\frac{1}{b}x\right)}$ ，

由 $7^{\left(\frac{1}{b}x\right)} = (\sqrt{7})^x \Rightarrow 7^{\frac{1}{b}} = \sqrt{7} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2$ ，

故數對 $(a, b) = (49, 2)$ 。

2. 解方程式 $100^x - 10^x - 30 = 0$ ，得 $x = \underline{\log 6}$ 。

【概念中心】利用因式分解解指數方程式

【解析】原式 $\Rightarrow 10^{2x} - 10^x - 30 = 0 \Rightarrow (10^x + 5)(10^x - 6) = 0 \Rightarrow 10^x = 6$ ，
 得 $x = \log 6$ ($\because 10^x + 5$ 恆正)。