3. 設 x 為實數且 $1\le x\le 5$，若 $(\sqrt{5}-2)^{x^2-4x+6}$ 的最大值為 M，則 $M=$ $\underline{9-4\sqrt{5}}$ 。

【概念中心】利用指數函數的單調性求最大值

【解析】$(\sqrt{5}-2)^{x^2-4x+6}=(\sqrt{5}-2)^{(x-2)^2+2}$

$\because$ 底數 $0<(\sqrt{5}-2)<1$

$\therefore$ $x=2$ 時，$(x-2)^2+2$ 有最小值 2

故 $(\sqrt{5}-2)^{(x-2)^2+2}$ 有最大值 $(\sqrt{5}-2)^2=9-4\sqrt{5}$ 。

4. 設 $-2\le x\le 2$，若 $x=\alpha$ 時，$f(x)=4^{x-1}-2^x$ 有最小值 m，則數對 $(\alpha,m)=$ $\underline{(1,-1)}$ 。

【概念中心】利用變數變換與指數函數的單調性求最小值(配合限定範圍)

【解析】令 $t=2^x$，則 $\frac{1}{4}\le t\le 4$ ($\because -2\le x\le 2\Rightarrow \frac{1}{4}\le 2^x\le 4$)，

得 $f(x)=\frac{1}{4}t^2-t=\frac{1}{4}(t^2-4t)=\frac{1}{4}(t-2)^2-1$，

在 $t=2$ 時有最小值 -1，此時 $t=2\Rightarrow 2^x=2\Rightarrow x=1$，

故 $(\alpha,m)=(1,-1)$。

5. 有 A,B 兩種放射性物質，其質量比為 2：5，若 A 物質的半衰期為 60 天，B 物質的半衰期為 20 天，則 180 天前 A,B 兩放射性物質的質量比為 $\underline{1：160}$ 。

【概念中心】熟悉指數函數的應用

【解析】經過 180 天，A 物質經過 $\frac{180}{60}=3$ 個半衰期，B 物質經過 $\frac{180}{20}=9$ 個半衰期，

所以 180 天前兩物質的質量比為 $2\times 2^3：5\times 2^9=1：160$。

6. 某種新藥物服用 t 小時後，殘留在身體內部的藥量為 $f(t)=920\times(0.62)^t$ (毫克)，則自 t 小時到 $t+1$ 小時內吸收的藥量與第 t 小時殘留在體內的藥量的比值為 $\underline{0.38}$ 。

【概念中心】能理解指數函數於生活中的應用

【解析】所求即 $\frac{f(t)-f(t+1)}{f(t)}=\frac{920\times 0.62^t-920\times 0.62^{t+1}}{920\times 0.62^t}=\frac{1-0.62}{1}=0.38$ 。

四、計算題：共 20 分

★1. 設 $f(x)=3(9^x+9^{-x})-17(3^x+3^{-x})+20$，則：

(1) 令 $t=3^x+3^{-x}$，試以 t 表示 $f(x)$ 。 (5 分)

(2) 承(1)題，若 $f(x)<0$，試求 t 的範圍。 (5 分)

【解】(1) 設 $t=3^x+3^{-x}\Rightarrow t^2=9^x+9^{-x}+2\Rightarrow t^2-2=9^x+9^{-x}$，

則 $f(x)=3(9^x+9^{-x})-17(3^x+3^{-x})+20=3(t^2-2)-17t+20=3t^2-17t+14$。

(2) 由 $t=2^x+2^{-x}\ge 2$ ($\because \frac{2^x+2^{-x}}{2}\ge\sqrt{2^x\times 2^{-x}}\Rightarrow 2^x+2^{-x}\ge 2$)，

由(1)，$f(x)=(3t-14)(t-1)<0\Rightarrow 1<t<\frac{14}{3}$，綜合得 $2\le t<\frac{14}{3}$。

【概念中心】利用變數變換解決較複雜的指數方程式

2. 將一杯熱牛奶放入冰箱，紀錄冷藏時間 t (分鐘)與牛奶的溫度 T (°C)，於早上 10：00 將該熱牛奶放入冰箱，溫度為 83 度，即 $(t,T)=(0,83)$，於 10：20 記錄第二次牛奶的溫度為 $29°C$，於 10：40 記錄第三次牛奶的溫度為 $11°C$，已知牛奶溫度 T 與冷藏時間 t 的關係式為 $T(t)=A\cdot 3^{kt}+B$，其中 A,B,K 均為常數，且之後牛奶仍置於該冰箱中並按此關係式進行溫度變化。若希望將牛奶取出時，該牛奶的溫度等於 $5°C$ 或低於 $5°C$，最快可於早上幾點幾分取出這杯牛奶呢？ (10 分)

素養題

【解】由 $(t,T)=(0,83),(20,29),(40,11)$，將數據代入關係式得 $\begin{cases}A+B=83\cdots\cdots① \\ A\times 3^{20K}+B=29\cdots\cdots② \\ A\times 3^{40K}+B=11\cdots\cdots③\end{cases}$，

② − ① $\Rightarrow (3^{20k}-1)A=-54\cdots\cdots④$，

③ − ② $\Rightarrow (3^{40k}-3^{20k})A=-18\cdots\cdots⑤$，

$\frac{⑤}{④}$ 得 $\frac{3^{40k}-3^{20k}}{3^{20k}-1}=\frac{-18}{-54}\Rightarrow\frac{3^{20k}(3^{20k}-1)}{3^{20k}-1}=\frac{1}{3}\Rightarrow 3^{20k}=\frac{1}{3}\Rightarrow k=-\frac{1}{20}$，

$k=-\frac{1}{20}$ 代回解得 $A=81$，$B=2$，即 $T(t)=81\cdot 3^{(-\frac{1}{20}t)}+2$，

令 $81\cdot 3^{(-\frac{1}{20}t)}+2\le 5\Rightarrow 3^{(-\frac{1}{20}t)}\le 3^{-3}\Rightarrow -\frac{1}{20}t\le -3\Rightarrow t\ge 60$，

得知自 10：00 起經過 60 分鐘後可使牛奶溫度降至 $5°C$，

故最快可於 11：00 之後取出這杯牛奶。

【概念中心】理解溫度關係轉換為指數函數的意義並解決問題