5 南一版．高中 學習評量 數學（三）A ★★★

2-2 對數與對數律

年　班　號　姓名

一、單一選擇題：每題 6 分，共 12 分

（ E ）1. 計算 $(\log_5 2-\log_{25}\frac{1}{4})(\log_2 25-\log_4\frac{1}{5})=$

(A) -5　(B) $-\frac{5}{2}$　(C) 0　(D) $\frac{5}{2}$　(E) 5

【概念中心】對數律與對數的基本運算

【解析】 原式 $=(\log_5 2-\log_{5^2}2^{-2})(\log_2 5^2-\log_{2^2}5^{-1})$

$=(\log_5 2+\log_5 2)(2\log_2 5+\frac{1}{2}\log_2 5)$

$=(2\log_5 2)\times(\frac{5}{2}\log_2 5)=5$，

故選(E)。

（ B ）2. 設 $\log_{11}a=9$，$\log_{11}b=7$，試問 $\log_{11}(a-b)$ 之值最接近下列哪一個選項？

(A) 2　(B) 9　(C) 16　(D) 23　(E) 30

【概念中心】活用對數的定義與估計對數值

【解析】 由 $a=11^9$，$b=11^7\Rightarrow a-b=11^9-11^7=11^7(121-1)=11^7\times120$，

$\Rightarrow\log_{11}(a-b)=\log_{11}(11^7\times120)=7+\log_{11}120\approx7+\log_{11}121=7+2=9$，

故選(B)。

二、多重選擇題：每題 10 分，共 20 分

（ B C E ）3. 已知 $\log 2\approx0.3010$，$\log 3\approx0.4771$，$10^{0.9275}=8.4625$，$10^{0.438}=2.7416$ 且實數 $x=3^{25}+2^{38}$，下列哪些選項正確？

(A) x 是 12 位數　(B) x 是 13 位數　(C) x 的首位數字為 1

(D) x 的首位數字為 9　(E) x 的個位數字為 7

【概念中心】利用常用對數來估計數字的大小

【解析】 (A)(B)(C)(D) $\log3^{25}=25\log3\approx25\times0.4771=11.9275=11+0.9275$，

由 $\log3^{25}\approx11+0.9275\Rightarrow3^{25}\approx10^{11+0.9275}=10^{11}\times10^{0.9275}=8.4625\times10^{11}$

$\therefore$ 3^{25} 為 12 位數且最高位數字為 8

$\log2^{38}=38\log2\approx38\times0.3010=11.438=11+0.438$，

由 $\log2^{38}\approx11+0.438\Rightarrow2^{38}\approx10^{11+0.438}=10^{11}\times10^{0.438}=2.7416\times10^{11}$

$\therefore$ 2^{38} 為 12 位數且最高位數字為 2

綜上結果得 $x=3^{25}+2^{28}$ 為 13 位數且最高位數字為 1。

(E) 2^{38} 個位數字為 4 且 3^{25} 個位數字為 3，則 x 的個位數字為 7。

故選(B)(C)(E)。

（ C E ）4. 設 a,b 為非零的任意實數，試問下列哪些選項正確？

(A) $\log(\frac{a}{b})=\log a-\log b$

(B) $\log(a^2+b^2)=\log(a^2)+\log(b^2)$

(C) $\log(a^2b^2)=\log(a^2)+\log(b^2)$

(D) $\log(a^2b^2)=2\log ab$

(E) 若 $a>0$，$b>0$，則 $\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}=\log_a b$

【概念中心】釐清對數的定義與對數律

【解析】 (A)(D) 若 $ab<0$，則 $\log(\frac{a}{b})$ 與 $2\log ab$ 無意義。

(B) 反例：$\log(3^2+4^2)=\log25\neq\log(3^2)+\log(4^2)=\log9+\log16=\log144$。

故選(C)(E)。

三、填充題：每格 8 分，共 48 分

1. 若 $a=\log_7 3$，$b=\log_3 7$，則 $7^{2a}+3^b$ 之值為__16__。

【概念中心】對數的定義

【解析】 由 $a=\log_7 3\Rightarrow7^a=3$，$7^{2a}=3^2=9$，

$b=\log_3 7\Rightarrow3^b=7$，

則 $7^{2a}+3^b=9+7=16$。

2. 已知 $\log_{(2a-1)}(-3a^2+11a-6)$ 恆有意義，則滿足上述條件的整數 a 有__1__個。

【概念中心】對數的定義與二次函數恆正

【解析】 $\log_{(2a-1)}(-3a^2+11a-6)$ 有意義 $\Rightarrow\begin{cases}2a-1>0\\2a-1\neq1\\-3a^2+11a-6>0\end{cases}$

$\Rightarrow\frac{2}{3}<a<3$ 且 $a\neq1$，

故該範圍內的整數 a 只有 1 個。

3. 設 $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$，以 a,b 表示 $\log_8 42$ 為__$\frac{1+a+ab}{3}$__。

【概念中心】換底公式的活用

【解析】 由 $\log_3 7=\frac{\log_2 7}{\log_2 3}\Rightarrow b=\frac{\log_2 7}{a}\Rightarrow\log_2 7=ab$，

則 $\log_8 42=\frac{\log_2 42}{\log_2 8}=\frac{\log_2 2+\log_2 3+\log_2 7}{3}=\frac{1+a+ab}{3}$。