

4. 若  $\log_a x = 7$ ,  $\log_b x = 3$ ,  $\log_c x = 21$ , 則  $\log_{abc} x$  之值為  $\frac{21}{11}$ 。

【概念中心】換底公式的活用  $-\log_a b \times \log_b a = 1$

【解析】由  $\log_a x = 7$ ,  $\log_b x = 3$ ,  $\log_c x = 21$

$$\Rightarrow \log_x a = \frac{1}{7}, \log_x b = \frac{1}{3}, \log_x c = \frac{1}{21},$$

$$\text{又 } \log_x abc = \log_x a + \log_x b + \log_x c = \frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{21} = \frac{11}{21}$$

$$\therefore \log_{abc} x = \frac{21}{11}$$

5. 計算  $\log_2 9 \times \log_6 8 \times \log_3 7 \times \log_5 6 \times \log_7 5 = \underline{6}$ 。

【概念中心】換底公式的應用-連鎖律

【解析】 $\log_2 9 \times \log_6 8 \times \log_3 7 \times \log_5 6 \times \log_7 5$

$$= \frac{2 \log 3}{\log 2} \times \frac{3 \log 2}{\log 6} \times \frac{\log 7}{\log 3} \times \frac{\log 6}{\log 5} \times \frac{\log 5}{\log 7} = 6。$$

註：可由此題複習或推導得  $\log_a b \times \log_b c \times \log_c d = \log_a d$ 。

6. 解指數方程式  $2 \times 25^x - 13 \times 5^x - 7 = 0$ ,  $x = \underline{\log_5 7}$ 。

【概念中心】利用對數解指數方程式

【解析】令  $t = 5^x$ ,

$$\text{則原式} \Rightarrow 2t^2 - 13t - 7 = 0 \Rightarrow (2t+1)(t-7) = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}, 7, \text{得 } 5^x = 7 \Rightarrow x = \log_5 7。$$

(因為  $5^x$  必大於 0, 所以  $5^x \neq -\frac{1}{2}$ )

#### 四、計算題：共 20 分

★1. 將  $k = (\frac{1}{3})^{40}$  表為小數, 求:

(1)  $k$  在小數點後有連續的  $a$  個 0, 則  $a$  為何? (5 分)

(2)  $k$  的小數點後第一個不為 0 的數字為何? (5 分)

(參考數值:  $\log 3 \approx 0.4771$ ,  $\log 6 \approx 0.7781$ ,  $\log 7 \approx 0.8451$ ,  $\log 8 \approx 0.9030$ ,  $\log 9 \approx 0.9542$ )

【解】(1) 設  $k = (\frac{1}{3})^{40}$ , 兩邊同時取  $\log$ ,

$$\Rightarrow \log k = 40 \times \log(\frac{1}{3}) = 40 \times (-\log 3) \approx -40 \times 0.4771 = -19.084 = -20 + 0.916$$

$\therefore \log k \approx -20 + 0.916$ , 共有 19 個 0, 得  $a = 19$

(2) 由  $\log k \approx -20 + 0.916$  得  $k \approx 10^{-20+0.916} = 10^{0.916} \times 10^{-20}$

$$\therefore 0.9030 < 0.916 < 0.9542$$

$$\therefore 10^{0.9030} < 10^{0.916} < 10^{0.9542} \Rightarrow 8 < 10^{0.916} < 9 \Rightarrow 10^{0.916} \approx 8 \dots,$$

故小數點後第一個不為 0 的數字為 8。

【概念中心】利用對數估計數值的大小

★2. 念慈是位國一的學生, 她打算十年後以 180 萬元的預算出國念書。她的母親將就學基金 100 萬元存入銀行。已知銀行定存的年利率為 4%, 並以每半年為一期複利計息。念慈成為大學新鮮人後開始思考這筆就學基金十年期滿後是否足夠 180 萬元, 若不足 180 萬元的差額, 她打算將此差額平均分配至大學四年中打工存錢補足, 則:

(1) 請計算該筆就學基金 100 萬經過十年複利後本利和約為多少萬元? (7 分)

(2) 請計算出念慈於大學四年內每月平均至少應存多少元才能補足差額? (四捨五入取到整數)

(參考數值:  $\log 1.02 \approx 0.0086$ ,  $\log 1.04 \approx 0.0170$ ,  $\log 1.265 \approx 0.1020$ ,

(3 分)

$$\log 1.268 \approx 0.1032, \log 1.479 \approx 0.17, \log 1.486 \approx 0.1720)$$

【解】(1) 每半年複利一次, 每期複利以 2% 計息, 十年共複利 20 期,

所以十年後的本利和為  $100 \times (1.02)^{20}$  萬元。

$$\text{令 } k = (1.02)^{20} \Rightarrow \log k = 20 \log(1.02) \approx 20 \times 0.0086 = 0.172 = \log 1.486 \Rightarrow k \approx 1.486,$$

十年後的本利和為  $100 \times (1.02)^{20} \approx 100 \times 1.486 = 148.6$  萬 = 1486000。

(2) 不足 180 萬的差額為  $1800000 - 1486000 = 314000$ ,

$$\text{則每月至少應存 } \frac{314000}{4 \times 12} = \frac{314000}{48} = 6541.666\dots \approx 6542 \text{ 元。}$$

【概念中心】由題目情境列出相應式子, 並利用對數估計數值大小以解決問題

素養題