

一、單一選擇題：每題 6 分，共 12 分

(B) 1. 設對數函數 $f(x) = \log_5 x$ 可化為以 10 為底的對數函數 $f(x) = \alpha \log x$ ，則 $\alpha =$

- (A) $\log 5$ (B) $\frac{1}{\log 5}$ (C) $1 - \log 5$ (D) $\log 5 - 1$ (E) $\frac{1}{2}$

【概念中心】對數函數的圖形-常用對數函數的圖形與 $y = \log_5 x$ 類似

【解析】由換底公式 $\log_5 x = \frac{\log x}{\log 5}$ ，所以 $f(x) = \log_5 x = \frac{\log x}{\log 5} = \frac{1}{\log 5} \log x$ ，即 $\alpha = \frac{1}{\log 5}$ ，

故選(B)。

(E) 2. 設 $a = \log_3 2$ ， $b = \log_{0.3} 20$ ， $c = \log_{0.2} 20$ ， $d = \log_2 3$ ，則 a, b, c, d 三數的大小關係為

- (A) $d > c > a > b$ (B) $a > d > c > b$ (C) $a > d > b > c$
(D) $d > a > b > c$ (E) $d > a > c > b$

【概念中心】利用對數的單調性比大小

【解析】① $\log_3 1 < \log_3 2 < \log_3 3 \Rightarrow 0 < a < 1$ ， $\log_2 3 > \log_2 2 \Rightarrow d > 1$ ， $d > a > 0$ 。

② $b = \log_{0.3} 20 < \log_{0.3} 1 = 0$ ， $c = \log_{0.2} 20 < \log_{0.2} 1 = 0$ ，

又 \because 底數 $0.3 > 0.2$

$\therefore \log_{0.3} 20 < \log_{0.2} 20 \Rightarrow b < c < 0$

綜上得 $d > a > 0 > c > b$ ，

故選(E)。

二、多重選擇題：每題 10 分，共 20 分

(AB) 3. 關於對數函數 $f(x) = \log_a x$ 的圖形，下列哪些選項正確？

- (A) 若 $a = 2$ ，則函數 $f(x) = \log_a x$ 為遞增函數
(B) 若 $a = 2$ ，則函數 $f(x) = \log_a x$ 的圖形為凹口向下
(C) 若 $a = 10$ ，則函數 $f(x) = \log_a x$ 的圖形通過 $(0, 1)$
(D) 若 $a = 10$ ，則對數函數 $f(x) = \log_a x$ 的圖形與任一鉛直線必有交點
(E) 若 $a = 10$ 且 $b > 0$ ，則 $f(b)$ 的值恆為正

【概念中心】對數函數的圖形及其性質

【解析】(A)(B) 當 $a = 2$ ，

函數 $f(x) = \log_2 x$ 作圖如右。

由圖可知 $f(x) = \log_2 x$ 的圖形為遞增函數且凹口向下。

(C)(D)(E) 當 $a = 10$ 時，

函數 $f(x)$ 為常用對數函數，即 $f(x) = \log x$ 。

當 $x = 0$ 時，

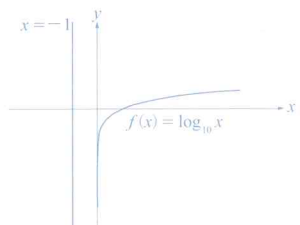
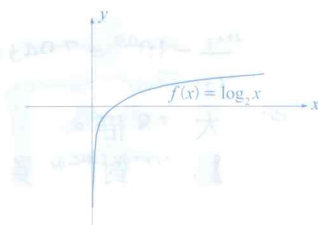
因為對數的真數不可為 0，所以 $f(0)$ 無意義。

$f(x) = \log x$ 作圖如右，

由圖知 $f(x) = \log x$ 與 $x = -1$ 不相交。

當 $b = 0.1$ 時， $f(b) = f(0.1) = \log 0.1 = -1 < 0$ 。

故選(A)(B)。



★(AB) 4. 設 $a > 1$ ，若 $f(x) = \log_a x$ 的函數圖形與直線 $x = 2$ ， $x = 5$ 分別交於 A, B 二點。

$g(x) = \log_{a^2} x$ 與直線 $x = 2$ ， $x = 5$ 分別交於 C, D 二點，設直線 AB 的斜率為 m_1 ，

直線 CD 的斜率為 m_2 ，下列選項哪些正確？

- (A) 函數 $g(x)$ 的圖形凹口向下 (B) 點 B 落在第一象限 (C) $m_1 > 0$
(D) $m_2 > 1$ (E) $1 < \frac{m_1}{m_2} < 2$

【概念中心】對數函數的圖形特徵

【解析】 $g(x) = \log_{a^2} x = \frac{1}{2} \log_a x$ ，作圖如右，

得點 $A(2, \log_a 2)$ ， $B(5, \log_a 5)$ ，

$C(2, \log_{a^2} 2)$ ， $D(5, \log_{a^2} 5)$ ，

由斜率定義得 $m_1 = \frac{\log_a 5 - \log_a 2}{5 - 2} = \frac{1}{3} \log_a \frac{5}{2}$ ，

$m_2 = \frac{\log_{a^2} 5 - \log_{a^2} 2}{5 - 2} = \frac{1}{3} \log_{a^2} \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{6} \log_a \left(\frac{5}{2}\right)$ 。

(A) 因為底數 $a^2 > 1$ ，所以 $g(x) = \log_{a^2} x$ 的圖形凹口向下。

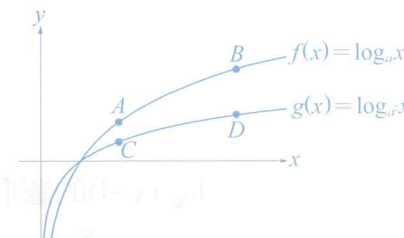
(B) 因為 $\log_a 5 > 0$ ，所以點 $B(5, \log_a 5)$ 在第一象限。

(C) 由 $a > 1$ ，又 $m_1 = \frac{1}{3} \log_a \frac{5}{2} > \frac{1}{3} \log_a 1 = 0 \Rightarrow m_1 > 0$ 。

(D) 當 $a = 2$ 時， $m_2 = \frac{1}{3} \log_4 \left(\frac{5}{2}\right) < \frac{1}{3} \log_4 64 = 1$ 。

(E) 由 $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\frac{1}{3} \log_a \frac{5}{2}}{\frac{1}{6} \log_a \frac{5}{2}} = \frac{1}{2}$ 。

故選(A)(B)(C)。



三、填充題：每格 8 分，共 48 分

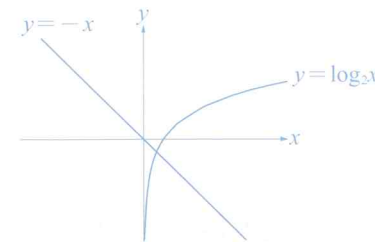
1. 方程式 $x + \log_2 x = 0$ 共有 1 個實根。

【概念中心】對數函數的圖形

【解析】 $x + \log_2 x = 0 \Rightarrow \log_2 x = -x$ ，作圖。

$y = -x$ 與 $y = \log_2 x$ ，兩圖形僅一個交點，

故方程式有 1 個實根。



2. 解方程式 $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 4 + \log_2 \frac{3}{16}$ ， $x =$ 2。

【概念中心】利用對數性質解方程式

【解析】對數有意義： $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$ ，

$\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 4 + \log_2 \frac{3}{16}$

$\Rightarrow \log_2[(x+1)(x-1)] = \log_2 3 \Rightarrow (x+1)(x-1) = 3$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ (-2 不合)。