

3. 設方程式 $\log_2 x - \log_x 4 - 1 = 0$ 的兩根為 α, β ，則 $\alpha\beta = \underline{2}$ 。

【概念中心】利用對數概念解方程式

【解析】令 $\log_2 x = t$ ，則 $\log_x 4 = 2 \log_x 2 = \frac{2}{t}$ ，

$$\text{原式化為 } t - \frac{2}{t} - 1 = 0 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+1) = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ 或 } t = -1,$$

$$t = \log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4 \text{ 或 } t = \log_2 x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2},$$

$$\text{得 } \alpha\beta = 4 \times \frac{1}{2} = 2。$$

4. 坐標平面上，函數 $y = \log_6(x+1)$ 的圖形上有三個點 $A(a, 2)$ ， $B(1, b)$ ， $C(2, c)$ ，則 $\log_6(a+b+c)$ 為 $\underline{2}$ 。

【概念中心】對數函數圖形上的點

【解析】 $2 = \log_6(a+1) \Rightarrow a = 35$ ， $b = \log_6(1+1) = \log_6 2$ ， $c = \log_6(2+1) = \log_6 3$ ，

$$\text{則 } \log_6(a+b+c) = \log_6(35 + \log_6 2 + \log_6 3) = \log_6 36 = 2。$$

5. 設不等式 $\log_{\sqrt{10}}(x-3) > (-1) + \log(x-1)$ ，該不等式的解為 $\underline{x > \frac{7}{2}}$ 。

【概念中心】利用對數函數之單調性解不等式

【解析】①對數有意義： $\begin{cases} x-3 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 3$ ，

$$\text{② } \log_{\sqrt{10}}(x-3) > (-1) + \log(x-1)$$

$$\Rightarrow 2 \log(x-3) > \log\left(\frac{1}{10}\right) + \log(x-1) \Rightarrow \log(x-3)^2 > \log\left(\frac{x-1}{10}\right)$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 > \left(\frac{x-1}{10}\right) \Rightarrow 10x^2 - 61x + 91 > 0 \Rightarrow (5x-13)(2x-7) > 0$$

$$\Rightarrow x > \frac{7}{2} \text{ 或 } x < \frac{13}{5},$$

$$\text{由①②得 } x > \frac{7}{2}。$$

★6. 設 $x > 0$ ，則 $x^{4-\log_3 x}$ 的最大值為 $\underline{81}$ 。

【概念中心】利用對數函數找出最大值

【解析】設 $k = x^{4-\log_3 x}$

$$\Rightarrow \log_3 k = \log_3 x^{(4-\log_3 x)} = (4-\log_3 x)(\log_3 x) = -(\log_3 x)^2 + 4\log_3 x = -[(\log_3 x) - 2]^2 + 4,$$

$$\log_3 x = 2, \text{ 即 } x = 9 \text{ 時, } \log_3 k \text{ 有最大值 } 4, \text{ 即 } k \text{ 有最大值 } 3^4 = 81。$$

四、計算題：共 20 分

1. 近代某遺傳學研究指出，狗狗壽命 x (歲) 相當於人類壽命 $f(x)$ (歲) 的關係式為 $f(x) = 16 \log_2 x + k$ ，試問：

(1) 已知 2 歲的狗狗相當於人類壽命的 47 歲，則 k 值為何？

(7 分)

(2) 承(1)，8 歲狗狗的壽命相當於人類壽命幾歲？

(7 分)

【解】(1) 由題 $x = 2$ 代入 $f(x)$ 得 $16 \log_2 2 + k = 47 \Rightarrow k = 31$ 。

(2) 承(1)得 $f(x) = 16 \log_2 x + 31$ 。 $x = 8$ 代入 $f(x)$ 得 $16 \log_2 8 + 31 = 79$ (歲)。

【概念中心】對數函數的認識與應用

2. 地震報告中所指的地震規模是用來描述地震大小的尺度。我國使用芮氏地震規模來描述地震的大小，然而當地震規模大於某數值(約 7.5)以上時，會有「飽和」現象，也就是計算出來的地震規模都趨近相同而造成失真現象。為避免這種失真的現象，有另一種描述地震大小的指標：地震矩規模 M_w ，其公式為 $M_w = \frac{2}{3} \log M_0 - 10.73$ ，其中 M_0 為「地震矩」用來表示地震所釋放出來的能量。

2002 年花蓮地震地震矩規模為 7.1，1999 年集集大地震地震矩規模為 7.7，試問集集大地震所釋放出來的能量為花蓮地震的幾倍？(四捨五入至整數)(參考數值： $\log 3.981 \approx 0.6$ ， $\log 7.943 \approx 0.9$)

(6 分)

【解】設集集大地震釋放出來的能量為 M_1 ，花蓮地震的為 M_2 ，

$$\text{由題 } \begin{cases} 7.7 = \frac{2}{3} \log M_1 - 10.73 \\ 7.1 = \frac{2}{3} \log M_2 - 10.73 \end{cases},$$

$$\text{上式減下式得 } 0.6 = \frac{2}{3} (\log M_1 - \log M_2) = \frac{2}{3} \log\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \Rightarrow \log\left(\frac{M_1}{M_2}\right) = 0.9$$

$$\Rightarrow \frac{M_1}{M_2} = 10^{0.9} = 7.943 \approx 8 \text{ (倍)},$$

所求大約 8 倍。

【概念中心】利用對數性質與運算解決情境問題