一、單一選擇題：每題 6 分，共 12 分

(B) 1. 已知 $a,b>0$ 且滿足 $\dfrac{\log_{\sqrt{2}} a}{\log_2 b}=\dfrac{5}{3}$，若 $a=b^t$，則 t 值應為下列哪一個選項？

(A) $\dfrac{5}{3}$ (B) $\dfrac{5}{6}$ (C) $\dfrac{3}{5}$ (D) $\dfrac{6}{5}$ (E) $\dfrac{5}{9}$

【概念中心】對數換底公式與對數的定義

【解析】 $\dfrac{\log_{\sqrt{2}} a}{\log_2 b}=\dfrac{\log_2(a^2)}{\log_2 b}=\log_b(a^2)=\dfrac{5}{3}\Rightarrow a^2=b^{\frac{5}{3}}\Rightarrow a=b^{\frac{5}{6}}$，$t=\dfrac{5}{6}$，

故選(B)。

(D) 2. 坐標平面上滿足 $y=\log[(4^x)^x]-\log 7$ 的所有點 (x,y) 所形成的圖形為下列哪一個選項？

(A)一個點 (B)一斜直線 (C)鉛直線 (D)開口向上的拋物線 (E)開口向下的拋物線

【概念中心】能作對數的基本運算

【解析】 $y=\log[(4^x)^x]-\log 7\Rightarrow y=(\log 4^{(x^2)})-\log 7\Rightarrow y=x^2(\log 4)-\log 7$，

圖形為一開口向上的拋物線，

故選(D)。

二、多重選擇題：每題 10 分，共 20 分

(A D E) 3. 關於下列選項中的大小關係哪些正確？

(A) $(-3)^{-5}>(-5)^{-3}$ (B) $0.2^{0.1}<0.1^{0.2}$ (C)若 $a,b>0$ 且 $a^3>b^2$，則 $a>b$

(D) $\dfrac{2020^5+2020^6}{2}>2020^{5.5}$ (E)若 $a>0$ 且 $a^{13}>a^7$，則 $\log_a 13>\log_a 7$

【概念中心】利用指數與對數性質比大小

【解析】(A)由 $(-3)^{-5}=\dfrac{1}{(-3)^5}=-\dfrac{1}{243}$，$(-5)^{-3}=\dfrac{1}{(-5)^3}=-\dfrac{1}{125}$，得 $(-3)^{-5}>(-5)^{-3}$。

(B)由 $0.1^{0.2}=0.01^{0.1}$，又 $0.2^{0.1}>0.01^{0.1}=0.1^{0.2}$。

(C)反例：設 $a=b=2$，則 $2^3>2^2$ 但 $a=b$。

(D)根據算幾不等式

$\because 2020^5\neq 2020^6$

$\therefore \dfrac{2020^5+2020^6}{2}>\sqrt{2020^5\times 2020^6}=2020^{5.5}$

(E)若 $a>0$ 且 $a^{13}>a^7$ 推導得底數 $a>1$，所以 $\log_a 13>\log_a 7$。

故選(A)(D)(E)。

(C D E) 4. 已知 x,y 皆為實數，若 $-3<\log x<-2.5$ 且 $2.5<\log y<3$，則下列哪些選項正確？

(參考數值：$\log 2\approx 0.301$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 5\approx 0.699$)

(A) x 為純小數且其小數點後的第一個不為 0 的數字可能是 5

(B) y 的整數部分為二位數

(C) y 的最高位數字可能為 4

(D) xy 的整數部分可能是 1

(E) $\dfrac{y}{x}$ 的整數部分為五位數

【概念中心】利用對數估計數值的大小

【解析】(A)設 $\log x=-3+\alpha$，$0<\alpha<0.5$，則 $x=10^{-3+\alpha}=10^{-3}\times 10^{\alpha}$，

又 $\because 0<\alpha<0.5$

$\therefore 10^0<10^{\alpha}<10^{0.5}<10^{0.602}\Rightarrow 1<10^{\alpha}<4$

第一個不為 0 的數字不可能是 5。

(B)(C)設 $\log y=2+\beta$，$0.5<\beta<1$，則 $y=10^{2+\beta}=10^2\times 10^{\beta}$，

又 $\because 0.5<\beta<1$

$\therefore 10^{0.4771}<10^{0.5}<10^{\beta}<10^1\Rightarrow 3<10^{\beta}<10$

故 y 的整數部分為三位數，且最高位數字可能為 $4,5,\cdots,9$。

(D) $-0.5<\log x+\log y=\log xy<0.5\Rightarrow 10^{-0.5}<xy<10^{0.5}\Rightarrow xy$ 的整數部分可能是 1。

(E) $5<\log y-\log x=\log\dfrac{y}{x}<6\Rightarrow 10^5<\dfrac{y}{x}<10^6\Rightarrow \dfrac{y}{x}=10^{5+\gamma}$，$0<\gamma<1$

$\therefore \dfrac{y}{x}$ 的整數部分為五位數

故選(C)(D)(E)。

三、填充題：每格 8 分，共 48 分

1. 設 $a>b>c$ 且這三數成等差，若 $a=\dfrac{\log_\pi 8}{\log_\pi 2}$，$c=\log_3 5\times\log_5 3$，則 $b=$ ___2___。

【概念中心】對數的換底公式應用與對數的運算

【解析】由 $a=\dfrac{\log_\pi 8}{\log_\pi 2}=\log_2 8=3$，$c=\log_3 5\times\log_5 3=1$

$\because 3,b,1$ 成等差 $\therefore b=2$

2. 聯立方程組 $\begin{cases}7\log x-5\cdot 3^y=-1\\ \log(x^6)+3^{y+1}=21\end{cases}$ 的解 (x,y) 為 ___(100,1)___。

【概念中心】利用指數與對數運算解聯立方程組

【解析】 $\begin{cases}7\log x-5\cdot 3^y=-1\\ \log(x^6)+3^{y+1}=21\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7\log x-5\cdot 3^y=-1\\ 6\log x+3\cdot 3^y=21\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}21\log x-15\cdot 3^y=-3\\ 30\log x+15\cdot 3^y=105\end{cases}$，

上下式相加得 $51\log x=102\Rightarrow\log x=2$，即 $x=100$，

$\log x=2$ 代回上式得 $42-15\cdot 3^y=-3\Rightarrow 3^y=3\Rightarrow y=1$，

故解 $(x,y)=(100,1)$。