3. 不等式$(\frac{1}{4})^{x^2-6x}>1024$的解為 $\underline{\quad 1<x<5 \quad}$ 。

【概念中心】利用指數函數單調性解不等式

【解析】$(\frac{1}{4})^{x^2-6x}>1024 \Rightarrow 2^{(-2x^2+12x)}>2^{10}$

$\Rightarrow -2x^2+12x>10$

$\Rightarrow x^2-6x+5<0$

$\Rightarrow 1<x<5$ 。

4. 已知方程式$6(\log x)^2-9(\log x)+3=0$的兩相異解為$\alpha,\beta\ (\alpha>\beta)$，則$(\log\frac{\alpha}{\beta})^2=$ $\underline{\quad \frac{1}{4} \quad}$ 。

【概念中心】運用對數運算解方程式

【解析】$6(\log x)^2-9(\log x)+3=0 \Rightarrow (6\log x-3)(\log x-1)=0 \Rightarrow \log x=\frac{1}{2}$或 1，

即$\log\alpha=1$，$\log\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore (\log\frac{\alpha}{\beta})^2=(\log\alpha-\log\beta)^2=(1-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

<另解>由根與係數關係$\begin{cases}\log\alpha+\log\beta=-\frac{-9}{6}=\frac{3}{2}\\ \log\alpha\times\log\beta=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\end{cases}$，

則$(\log\frac{\alpha}{\beta})^2=(\log\alpha-\log\beta)^2=(\log\alpha+\log\beta)^2-4\log\alpha\times\log\beta=(\frac{3}{2})^2-4\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 。

★5. 滿足$0\le\log_3(\log_4 x)<1$的整數解有 $\underline{\quad 60 \quad}$ 個。

【概念中心】利用對數的定義與對數函數單調性解不等式

【解析】對數有意義：$\begin{cases}x>0\\ \log_4 x>0\end{cases} \Rightarrow x>1$，

又由$0\le\log_3(\log_4 x)<1 \Rightarrow 1\le\log_4 x<3 \Rightarrow 4\le x<64$，

整數解共有$63-3=60$(個)。

6. 某放射性物質的質量(公克)會隨著時間(年)減少，已知質量$W(t)$(公克)與時間t(年)的關係能以指數關係式表示：$W(t)=W_0\times2^{-0.0002t}$公克，其中$W_0$為常數且$t\ge0$。所以至少需經過 $\underline{\quad 15000 \quad}$ 年才使得該放射性物質的質量變為原本的 12.5%。

【概念中心】理解情境並利用指數概念解決問題

【解析】$W(t)=W_0\times2^{-0.0002t}=0.125\times W_0$

$\Rightarrow 0.125=2^{-0.0002t} \Rightarrow \frac{1}{8}=(\frac{1}{2})^{0.0002t} \Rightarrow 0.0002t=3 \Rightarrow t=\frac{3}{0.0002}=15000$(年)。

四、計算與混合題：共 20 分

★1. 某國於 2020 年 1 月初爆發肺炎疫情，下表為該國的抗疫記事：

日期	內容
2020/01/06	爆發國內第 1 例
2020/01/31	累計至 2020 年 1 月 31 日，累計感染人數為 1980 人。 經專業人員研判，疫情未獲得疫情控制之前， 病患人數將以每月新增 10%的速度擴張感染。
2020/02/01	政府開始進行疫情管制並開始研製新藥， 預計於 2 個月後獲得控制且使感染人數不再擴張。
2020/04/01	政府成功研製新藥並宣布疫情獲得控制(感染人數不再擴張)。 政府抗疫新宣言：希望治療 5 個月後(4 月~8 月)， 病患人數能降低至 1 月份感染人數的一半以下。
	持續更新…

(1) 試問該國累計感染人數的最大值約為多少人？
(A) 2178　(B) 2396　(C) 2635　(D) 4365　(E) 6534　(6 分)

(2) 欲達成上述政府抗疫新宣言的目標，假設新藥使得病患人數每月減少$a\%$，請問此a值之最小整數為何？ (8 分)

(參考數值：$\log1.1\approx0.0414$，$\log2\approx0.3010$，$\log8.38\approx0.9232$)　素養題

【解】(1) 1 月份累計感染人數為 1980 人，兩個月後疫情獲得控制且不再擴張，

即累計感染人數的最大值為$1980\times(1.1)^2=2395.8$，

故約 2396 人，故選(B)。

(2) 設 1 月初疫情爆發時病患人數為 1980 人，

由題可列式：

$\cancel{1980}\times(1.1)^2\times(1-a\%)^5\le\frac{1}{2}\times\cancel{1980} \Rightarrow (1.1)^2(1-a\%)^5\le\frac{1}{2}$，

取 log 後得$2\log(1.1)+5\log(1-a\%)\le-\log2$，

移項整理後得$\log(1-a\%)\le-\frac{\log2+2\log(1.1)}{5}=-\frac{0.3010+2\times0.0414}{5}$

$=-0.07676=(-1)+0.92324$

$=(-1)+\log8.38=\log0.838$，

即$1-a\%\le0.838 \Rightarrow a\%\ge0.162$，故$a$值之最小整數為 16。

【概念中心】能理解情境問題用指數式列式，並以對數解決問題

2. 2019 年 9 月澳洲森林大火造成百多種動物失去棲息地。根據研究顯示，森林大火的火勢一旦無法控制，燒掉的總面積y(公頃)與時間x(小時)的關係式為$y=k\times1.3^x$，其中k為起火後已燒掉的面積(單位為公頃)。已知某地發生森林大火且林區中已有10公頃的森林被燒掉，若火勢無法獲得控制，根據此關係式，試問約經過多少小時之後(四捨五入取至整數)，燒掉的總面積會到達 10000 公頃？(參考數值：$\log1.3\approx0.1131$)　(6 分)

素養題

【解】由題目列式：$10\times(1.3)^x>10000 \Rightarrow (1.3)^x>1000$，

取 log 得$x\log(1.3)>4 \Rightarrow x>\frac{4}{\log1.3}\approx\frac{4}{0.1139}\approx35.1$(小時)，

故大約經過 35 小時之後，燒掉的面積會達到 10000 公頃。

【概念中心】能理解情境問題用指數式列式，並以對數解決問題