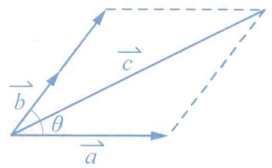
4. 已知 $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$ 且 $\overrightarrow{c}$ 平分 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 的夾角，$|\overrightarrow{c}|=3|\overrightarrow{b}|$，若 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ，

則 $\cos\theta=$ $\underline{\quad\dfrac{1}{8}\quad}$ 。

【概念中心】向量的線性組合

【解析】$\because\ \overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ 又 $\overrightarrow{c}$ 平分 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 的夾角



$\therefore$ 右圖為菱形，$|\overrightarrow{a}|=2|\overrightarrow{b}|$

由 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$

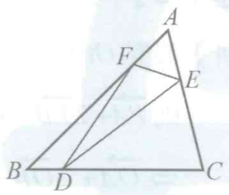
$\Rightarrow|\overrightarrow{c}|^2=|\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|^2$

$\Rightarrow|\overrightarrow{c}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4|\overrightarrow{b}|^2$

$\Rightarrow 9|\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+4|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot\cos\theta+4|\overrightarrow{b}|^2$

$\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{5|\overrightarrow{b}|^2-|\overrightarrow{a}|^2}{4|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}=\dfrac{|\overrightarrow{b}|^2}{8|\overrightarrow{b}|^2}=\dfrac{1}{8}$ 。

5. $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 上分別取 D,E,F 三點使得 $\overline{CD}=4\overline{BD}$，$\overline{CE}=2\overline{AE}$，$\overline{FB}=3\overline{AF}$，如右圖所示，設 G 為 $\triangle DEF$ 的重心，$\overrightarrow{AG}=t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$，則數對 $(t,s)=$ $\underline{\quad(\dfrac{7}{20},\dfrac{8}{45})\quad}$ 。

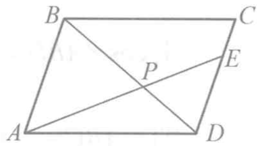


【概念中心】向量線性組合與重心的應用

【解析】由 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD})=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{5})=\dfrac{7}{20}\overrightarrow{AB}+\dfrac{8}{45}\overrightarrow{AC}$

$\therefore(t,s)=(\dfrac{7}{20},\dfrac{8}{45})$

6. 平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{CD}$ 上一點 E 使得 $\overline{DE}=2\overline{CE}$ 又 $\overline{BD}$ 與 $\overline{AE}$ 交於點 P，若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則數對 $(x,y)=$ $\underline{\quad(\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5})\quad}$ 。



【概念中心】向量的線性組合與共線定理

【解析】$\overline{BP}:\overline{PD}=\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{CD}:\overline{CE}=3:2$

$\therefore\ \overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AD}$

<另解> 令 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AE}=k(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})=k(\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DC})$

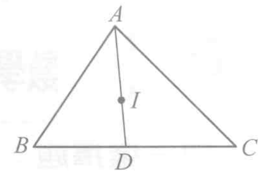
$=k(\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB})=\dfrac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}$

$\because B,P,D$ 共線 $\therefore\dfrac{2}{3}k+k=1\Rightarrow k=\dfrac{3}{5}$

即 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AD}$，故 $(x,y)=(\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5})$ 。

四、計算題：共 20 分

★1. 已知 $\triangle ABC$ 中，內心為 I，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=6$，$\angle BAC$ 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D 點。



(1) 設 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求數對 (x,y) 為何？（6 分）

(2) 設 t 為實數且 $\overrightarrow{AI}=t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$，求數對 (t,s) 為何？（8 分）

【解】(1) $\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=4:6=2:3$，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$，故 $(x,y)=(\dfrac{3}{5},\dfrac{2}{5})$ 。

(2) $\because\ \overline{BD}:\overline{CD}=2:3$ 且 $\overline{BC}=5$ $\therefore\ \overline{BD}=2$

連接 $\overline{BI}$，由 $\overline{AI}:\overline{ID}=\overline{AB}:\overline{BD}=4:2=2:1$

$\Rightarrow\overrightarrow{AI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}(\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC})=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{15}\overrightarrow{AC}$，

故 $(t,s)=(\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{15})$ 。

<另解> 由內心公式 $\overrightarrow{AI}=\dfrac{6}{4+5+6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{4+5+6}\overrightarrow{AC}=\dfrac{6}{15}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{15}\overrightarrow{AC}$，$(t,s)=(\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{15})$ 。

【概念中心】向量線性組合－內心，向量的分點公式

2. 阿宏參加夜跑團，夜跑團利用手機 APP 規劃訓練路徑，APP 將地圖座標化且地圖上 1 單位即代表 0.2 公里，設起點為 $O(0,0)$，接著沿向量 $(-4,-3)$ 方向移動 10 單位到 A 點，接著沿著 $(3,-4)$ 方向移動 15 單位 B 點，最後從 B 點跑回起點，試問最後一段跑程 $\overline{BO}$ 為幾公里？（6 分）

【解】由 $|(-4,-3)|=5$ 與移動 10 單位至 A 點可知 $A(-8,-6)$，　素養題

同理 $|(3,-4)|=5$ 與移動 15 單位至 B 點，

由 $\overrightarrow{AB}=3(3,-4)$ 可知 $B(-8+9,-6-12)=B(1,-18)$，

所以跑程 $\overline{BO}=\sqrt{1^2+(-18)^2}=\sqrt{325}=5\sqrt{13}$ 單位 $=5\sqrt{13}\times0.2$ 公里 $=\sqrt{13}$ 公里。

【概念中心】情境結合向量的加減法