

一、單一選擇題：每題6分，共12分

(B) 1. 若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$ ，求 $\begin{vmatrix} 2a+7b & a+3b \\ 2c+7d & c+3d \end{vmatrix}$ 之值為

- (A) -10 (B) -5 (C) 5 (D) 10 (E) 15

【概念中心】行列式的性質與運算

【解析】 $\begin{vmatrix} 2a+7b & a+3b \\ 2c+7d & c+3d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a+3b \\ d & c+3d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -5$ ，
 $\begin{matrix} \xrightarrow{\times(-2)} & \xrightarrow{\times(-3)} \\ \uparrow & \uparrow \end{matrix}$

故選(B)。

(A) 2. 設 $A(-1, -2), B(4, 1), C(2, 3)$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為何？

- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

【概念中心】利用行列式求三角形的面積

【解析】 $\overrightarrow{AB} = (5, 3), \overrightarrow{AC} = (3, 5)$ ，

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

故選(A)。

二、多重選擇題：每題10分，共20分

(AD) 3. 設 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$ ，下列哪些選項正確？
E

(A) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 5$ (B) $\begin{vmatrix} a & -b \\ -c & d \end{vmatrix} = -5$ (C) $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{vmatrix} = 15$

(D) $\begin{vmatrix} a & a-2b \\ c & c-2d \end{vmatrix} = -10$ (E) 若 a, b 均為正數，則 $\begin{vmatrix} \log_2 a^3 & \log_3 b^6 \\ \log_2 a^4 & \log_3 b^8 \end{vmatrix} = 0$

【概念中心】二階行列式的性質

【解析】(A) 行列互換其值不變。

(B) $\begin{vmatrix} a & -b \\ -c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 5$ 。

(C) $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{vmatrix} = 3 \times 3 \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3 \times 3 \times 5 = 45$ 。

(D) $\begin{vmatrix} a & a-2b \\ c & c-2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -2b \\ c & -2d \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -2 \times 5 = -10$ 。

(E) $\begin{vmatrix} \log_2 a^3 & \log_3 b^6 \\ \log_2 a^4 & \log_3 b^8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \log_2 a & 6 \log_3 b \\ 4 \log_2 a & 8 \log_3 b \end{vmatrix} = 24 \log_2 a \times \log_3 b - 24 \log_2 a \times \log_3 b = 0$ 。

故選(A)(D)(E)。

(AD) 4. 設 a, b, c, d 為實數，且 $a^2 + b^2 = 9, c^2 + d^2 = 16$ ，若 $ac + bd$ 之最大值為 M_1 ，最小值為 m_1 ， $ab - cd$ 之最大值為 M_2 ，最小值為 m_2 ，則下列哪些正確？

- (A) $M_1 = 12$ (B) $M_1 = 144$ (C) $m_1 = -144$ (D) $M_2 = \frac{25}{2}$ (E) $m_2 = -25$

【概念中心】柯西不等式(一般形式)

【解析】(A)(B)(C) 由柯西不等式知

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

$$\Rightarrow 9 \times 16 \geq (ac + bd)^2$$

$$\Rightarrow 144 \geq (ac + bd)^2$$

$$\Rightarrow -12 \leq ac + bd \leq 12$$

$$\text{得 } M_1 = 12, m_1 = -12$$
。

(D)(E) $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2} \Rightarrow \frac{9}{2} \geq |ab| \Rightarrow -\frac{9}{2} \leq ab \leq \frac{9}{2}$ ，

同理得， $-8 \leq cd \leq 8 \Rightarrow -8 \leq -cd \leq 8$ ，

則 $-\frac{25}{2} \leq ab - cd \leq \frac{25}{2}$ ，即 $M_2 = \frac{25}{2}, m_2 = -\frac{25}{2}$ 。

故選(A)(D)。

三、填充題：每格8分，共48分

1. 試計算 $\begin{vmatrix} 543 & 97 \\ 540 & 100 \end{vmatrix} = \underline{1920}$ 。

【概念中心】二階行列式的定義與性質

【解析】 $\begin{vmatrix} 543 & 97 \\ 540 & 100 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 543 & 97 \\ 540 - 543 & 100 - 97 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 543 & 97 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 543 & 97 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3(543 + 97) = 1920$ 。

2. 設實數 x, y 滿足 $\vec{a} = (x, y), \vec{b} = (3, 6)$ 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$ 。已知 $x = a, y = b$ 時， $x^2 + y^2$ 有最小值為 m ，則序組 $(a, b, m) = \underline{(1, 2, 5)}$ 。

【概念中心】柯西不等式

【解析】 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 15 \Rightarrow 3x + 6y = 15$ ，

由柯西不等式 $(x^2 + y^2)(3^2 + 6^2) \geq (3x + 6y)^2 \Rightarrow (x^2 + y^2) \times 45 \geq 15^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 5$ ，
 最小值 $m = 5$ ，

等號成立時 $\frac{x}{3} = \frac{y}{6} \Rightarrow 2x = y$ ，

解聯立方程式 $\begin{cases} 2x = y \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$ 得 $(x, y) = (1, 2)$ ，即 $(a, b) = (1, 2)$ ，

序組 $(a, b, m) = (1, 2, 5)$ 。