3. 設兩非零向量 $\overrightarrow{u}=(a,b),\overrightarrow{v}=(c,d)$ 滿足 $|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|$，則行列式 $\begin{vmatrix}\sqrt{6}a & \sqrt{3}b\\ 2c & \sqrt{2}d\end{vmatrix}=$ __0__ 。

【概念中心】三角不等式

【解析】由三角不等式 $|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|\ge|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|$ 等號成立時，

$\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ 兩非零向量同向 $\Rightarrow\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=0$，

所求 $\begin{vmatrix}\sqrt{6}a & \sqrt{3}b\\ 2c & \sqrt{2}d\end{vmatrix}=2\sqrt{3}\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=0$ 。

4. 設兩非零向量 $\overrightarrow{u}=(a,b),\overrightarrow{v}=(c,d)$ 所張出的平行四邊形面積為 3，求由向量 $5\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 所張出的平行四邊形面積為 __18__ 。

【概念中心】兩向量所張出的平行四邊形面積

【解析】$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 所張的平行四邊形面積為 3，設 $\overrightarrow{u}=(a,b),\overrightarrow{v}=(c,d)\Rightarrow\left|\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right|=3$，

$5\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=(5a-c,5b-d)$，$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(a+c,b+d)$，

向量 $5\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 所張出的平行四邊形面積為

$\left|\begin{vmatrix}5a-c & 5b-d\\ a+c & b+d\end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix}6a & 6b\\ a+c & b+d\end{vmatrix}\right|=6\left|\begin{vmatrix}a & b\\ a+c & b+d\end{vmatrix}\right|=6\left|\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right|=6\times3=18$ 。

5. 設平面上相異三點 A,B,C 滿足 $|\overrightarrow{AB}|=2+|\overrightarrow{AC}|=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$，則△$ABC$ 的面積為 __$\sqrt{15}$__ 。

【概念中心】三角形面積公式△$ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

【解析】由 $|\overrightarrow{AB}|=2+|\overrightarrow{AC}|=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\Rightarrow|\overrightarrow{AB}|=4,|\overrightarrow{AC}|=2,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$，

所求△$ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{16\times4-2^2}=\sqrt{15}$ 。

6. 設點 P 落在由 x 軸、y 軸與 $L:4x+3y=12$ 所圍成的三角形區域內且 $\overline{OP}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$（$O$ 為原點），求 P 點到此三直線距離和的最大值為 __3__ 。

【概念中心】依題列式並利用柯西不等式找出最大值

【解析】設點 $P(x,y)$ 到直線 L 的距離為 $d(P,L)=\frac{|4x+3y-12|}{5}=-\frac{4x+3y-12}{5}$，

所以點 P 到三直線的距離和為 $x+y-\frac{(4x+3y-12)}{5}=\frac{1}{5}(x+2y+12)$，

$\overline{OP}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\Rightarrow x^2+y^2=\frac{9}{5}$，

由柯西不等式 $(x^2+y^2)(1^2+2^2)\ge(x+2y)^2\Rightarrow\frac{9}{5}\times5\ge(x+2y)^2\Rightarrow-3\le x+2y\le3$

$\therefore\frac{1}{5}(x+2y+12)$ 的最大值為 $\frac{1}{5}(3+12)=\frac{1}{5}\times15=3$

四、計算題：共 20 分

★1. 已知點 P 是平面上△ABC 內部的一點，且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16\sqrt{3}$ 且 $\angle BAC=30°$，若△PBC,△PCA,△PAB 的面積分別是 $2,x,y$，求：

(1) $x+y$ 為何？（6 分）

(2) $\frac{9}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值為何？（6 分）

【解】(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos30°=16\sqrt{3}\Rightarrow|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|=32$，

△ABC 面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{32^2-(16\sqrt{3})^2}=8$，

△ABC=△PBC+△PCA+△PAB

$\Rightarrow8=2+x+y$

$\Rightarrow x+y=6$ 。

(2) 由柯西不等式

$[(\sqrt{\frac{9}{x}})^2+(\sqrt{\frac{1}{y}})^2][(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2]\ge(3+1)^2$

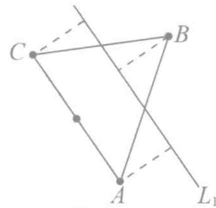
$\Rightarrow(\frac{9}{x}+\frac{1}{y})\times6\ge16\Rightarrow\frac{9}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{8}{3}$，

所求最小值為 $\frac{8}{3}$ 。

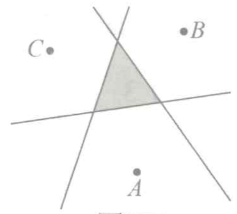
【概念中心】三角形面積與柯西不等式的應用

2. 某地發生嚴重傳染性疾病，政府想為病情較嚴重的三座鄉鎮鋪設一些新便道以便運送救助物資，並在三條新便道所圍成的區域內規畫建立物流機構來分送物資；希望每一條道路到此三個鄉鎮的距離都相同(但不同道路與小鎮的距離可能不同)，例如圖(一)中的 L_1 過 $\overline{AB}$ 中點與 $\overline{BC}$ 中點之直線，即 L_1 是到 A,B,C 三座鄉鎮均等距的道路。已知此三座城市的坐標分別為 $A(-1,-5)$，$B(4,10),C(-10,8)$，請問可用來規劃為臨時物流機構的區域面積(如圖(二))為何？（8 分）

素養題



圖(一)

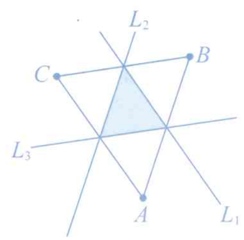


圖(二)

【解】點 P,Q,R 分別為 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}$ 的中點，

分別連接 PQ,QR,RP 得 L_1,L_2,L_3，

作圖如右，



這三條道路所圍成的區域即△PQR，其面積為△ABC 的 $\frac{1}{4}$ 。

由 $\overrightarrow{AB}=(5,15),\overrightarrow{AC}=(-9,13)$，則△$ABC$ 的面積為 $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}5 & 15\\ -9 & 13\end{vmatrix}\right|=100$，

故所求為 $\frac{1}{4}\times100=25$ 。

【概念中心】二階行列式求三角形面積