4. 設實數 x,y 滿足 $5x+3y=16$，則 x^2+3y^2 的最小值為 $\underline{\dfrac{64}{7}}$ 。

【概念中心】柯西不等式

【解析】由柯西不等式：

$[x^2+(\sqrt{3}y)^2][5^2+(\sqrt{3})^2]\ge(5x+3y)^2$

$\Rightarrow(x^2+3y^2)\times 28\ge 16^2$

$\Rightarrow x^2+3y^2\ge\dfrac{16^2}{28}=\dfrac{64}{7}$ 。

5. 設 $|\overrightarrow{u}|=|\overrightarrow{v}|=1$，$\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ 兩向量夾角為 $45°$，若 $\sqrt{2}\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ 與 $-\overrightarrow{u}+\sqrt{2}\overrightarrow{v}$ 的夾角為 θ，則 $\cos\theta$ 為 $\underline{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ 。

【概念中心】由向量的內積求出夾角

【解析】$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos 45°=1\times1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$|\sqrt{2}\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}|=\sqrt{(\sqrt{2}\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\cdot(\sqrt{2}\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})}$

$=\sqrt{2|\overrightarrow{u}|^2-2\sqrt{2}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+|\overrightarrow{v}|^2}$

$=\sqrt{2\times1-2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1}=1$，

同理，$|-\overrightarrow{u}+\sqrt{2}\overrightarrow{v}|=1$，

$(\sqrt{2}\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\cdot(-\overrightarrow{u}+\sqrt{2}\overrightarrow{v})=-\sqrt{2}|\overrightarrow{u}|^2+3\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}-\sqrt{2}|\overrightarrow{v}|^2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

則 $\cos\theta=\dfrac{(\sqrt{2}\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\cdot(-\overrightarrow{u}+\sqrt{2}\overrightarrow{v})}{|\sqrt{2}\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}|\times|-\overrightarrow{u}+\sqrt{2}\overrightarrow{v}|}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 。

6. 已知 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 所張的平行四邊形面積為 6，則由 $2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$ 所張的平行四邊形面積為 $\underline{42}$ 。

【概念中心】利用行列式求平行四邊形面積

【解析】$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 所張的平行四邊形面積為 6，設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)\Rightarrow\left|\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right|=6$，

$2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}=(2a_1+3b_1,2a_2+3b_2)$，$\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}=(a_1-2b_1,a_2-2b_2)$，

$2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$ 所張的平行四邊形面積為

$\left|\begin{vmatrix}2a_1+3b_1 & 2a_2+3b_2\\ a_1-2b_2 & a_2-2b_2\end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix}7b_1 & 7b_2\\ a_1-2b_2 & a_2-2b_2\end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix}7b_1 & 7b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\right|=7\left|\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\right|=7\times6=42$ 。

四、計算與混合題：共 20 分

1. 點 O 為平面上的原點，設 $\overrightarrow{a}=(3,1)$，$\overrightarrow{b}=(1,3)$，設 S 為滿足 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$ 的所有 P 點所形成的區域，其中 $0\le x\le 2$，$-2\le y\le 0$，試問：

(1) 區域 S 不通過第幾象限？（5 分）

(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限　(D)第四象限　(E)每個象限均有通過

(2) 區域 S 的周長為何？（5 分）

【解】作圖如右，

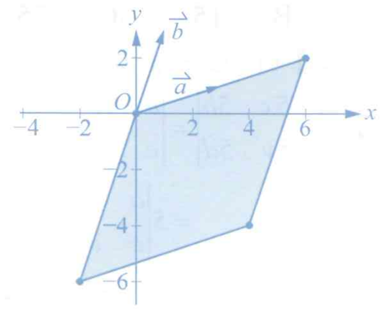
(1) 不通過第二象限，故選(B)。

(2) 如圖，區域 S 為一菱形，

又其中一邊的邊長為 $2\overrightarrow{a}$ 的長度，

$2|\overrightarrow{a}|=2\sqrt{1^2+3^2}=2\sqrt{10}$，

故區域 S 的周長為 $2\sqrt{10}\times4=8\sqrt{10}$ 。



【概念中心】向量的線性組合

2. 學校教官來到圓形公園進行大地尋寶課程，教官發給同學一份圓形公園的平面地圖，地圖上給了三個提示：第一，將此圓形公園的方程式設為 $C:(x+2)^2+(y-4)^2=25$ 且寶物就藏在地圖中的 P 點；第二，請移動至地圖上的大樹 A 點處拿取第二個提示；第三，請移動至地圖上的雕像 B 點拿取第三個提示，欣茹至 A,B 兩處拿到的分別為 $\overrightarrow{AP}=(2,-10)$，$\overrightarrow{BP}=(10,-4)$。已知 A，B 兩點均在圓周上，請問寶藏地點 P 的坐標為何？（10 分）

素養題

【解】設點 $P(a,b)$，則 A 為 $(a-2,b+10)$，B 為 $(a-10,b+4)$，

則 $\begin{cases}(a-2+2)^2+(b+10-4)^2=25\\(a-10+2)^2+(b+4-4)^2=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+(b+6)^2=25\\(a-8)^2+b^2=25\end{cases}\cdots\cdots(*)$，

$\Rightarrow$ 上式減下式得 $4a+3b-7=0\Rightarrow b=\dfrac{7-4a}{3}$，代入$(*)$，

得 $a=4$ 且 $b=-3$，故 P 點為 $(4,-3)$。

【概念中心】能根據情境來列式並以向量的坐標表示法與圓方程式解決問題