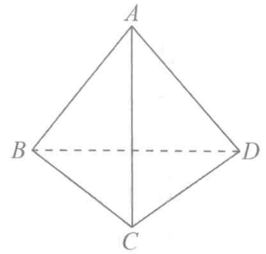
★ 3. 如右圖，四面體 $ABCD$ 中，$\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=10$，$\overline{AB}=8$，$\overline{CD}=16$，試回答下列各小題：



(1) 若平面 ACD 與平面 BCD 所成的兩面角為 θ，則 $\cos\theta=$ $\underline{\dfrac{1}{9}}$。

(2) 若 A 點在底面 BCD 的投影點為 H，則 $\overline{AH}$ 的長度為 $\underline{\dfrac{8\sqrt{5}}{3}}$。

(3) 兩歪斜線 AB 與 CD 之間的距離為 $\underline{2\sqrt{5}}$。

【概念中心】兩面角，四面體的高，兩歪斜線的距離

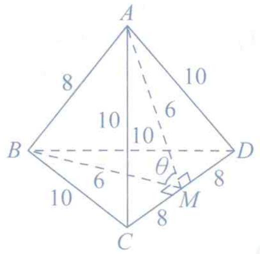
【解析】(1) 設 M 為 $\overline{CD}$ 的中點，連接 $\overline{AM}$，$\overline{BM}$，

則 $\overline{AM}\perp\overline{CD}$ 且 $\overline{BM}\perp\overline{CD}$，$\overline{CM}=\overline{DM}=8$，

$\Rightarrow\ \overline{AM}=\overline{BM}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，

在 $\triangle ABM$ 中，$\angle AMB=\theta$，

由餘弦定理可得 $\cos\theta=\dfrac{6^2+6^2-8^2}{2\times6\times6}=\dfrac{1}{9}$。



(2) 設 M 為 $\overline{CD}$ 的中點，連接 $\overline{CH}$，$\overline{DH}$，$\overline{HM}$，

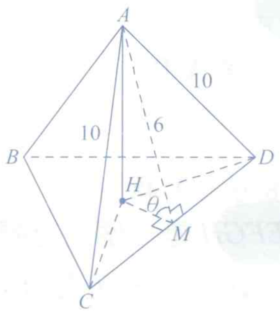
則 $\overline{CH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AH}^2}=\overline{DH}$

$\because$ M 為 $\overline{CD}$ 的中點 $\therefore$ $\overline{HM}\perp\overline{CD}$

在直角 $\triangle AMH$ 中，$\angle AMH=\theta$

$\because\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-(\dfrac{1}{9})^2}=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

$\therefore\ \overline{AH}=\overline{AM}\sin\theta=6\times\dfrac{4\sqrt{5}}{9}=\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$



(3) 設 M, N 分別為 $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ 的中點，

在 $\triangle ABM$ 中

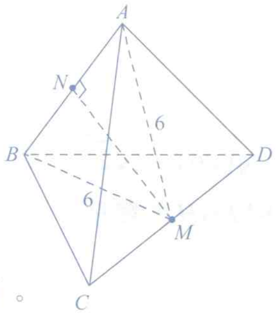
$\because\ \overline{AM}=\overline{BM}=6$ $\therefore\ \overline{MN}\perp\overline{AB}$

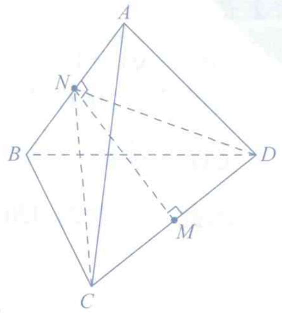
又在 $\triangle CDN$ 中

$\because\ \overline{CN}=\overline{DN}$ $\therefore\ \overline{MN}\perp\overline{CD}$

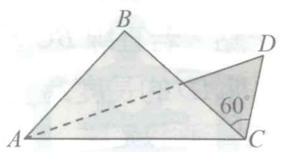
$\Rightarrow$ 兩歪斜線 AB 與 CD 之間的距離

$\overline{MN}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{AN}^2}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$。





★ 4. 如右圖，將一張正方形的紙 $ABCD$，沿著對角線 $\overline{AC}$ 摺起，若 $\angle BCD=60°$，則平面 BAC 與 DAC 所成之兩面角為 $\underline{90}$ 度。



【概念中心】兩面角

【解析】設正方形 $ABCD$ 的邊長為 a，M 為 $\overline{AC}$ 的中點，

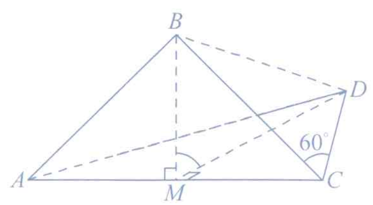
連接 $\overline{BM}$，$\overline{DM}$ 與 $\overline{BD}$，

則 $\overline{BC}=\overline{CD}=a$，$\overline{BM}=\overline{DM}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，$\overline{BM}\perp\overline{AC}$，$\overline{DM}\perp\overline{AC}$

$\because\ \overline{BC}=\overline{CD}=a$，$\angle BCD=60°$ $\therefore\ \overline{BD}=a$

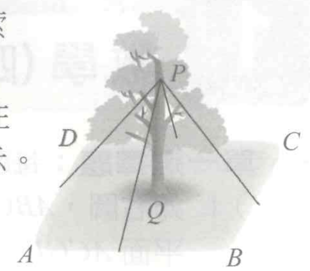
在 $\triangle BMD$ 中，$\cos(\angle BMD)=\dfrac{(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2-a^2}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a}=0$，

因此，所求為 $\angle BMD=90°$。



四、計算題：每題 10 分，共 20 分

★ 1. 颱風即將來襲，小南為了做好防颱準備，打算將自家庭院的一棵樹木用繩索固定住。已知這棵樹木恰好位於一個邊長為 24 公尺的正方形花圃 $ABCD$ 的中心 Q，且垂直生長於地面。如果小南想要由樹上離地面 5 公尺處的 P 點往正方形花圃的 4 條邊線上分別各拉 1 條等長的繩子來支撐樹木，如右圖所示。試問：



(1) 這 4 條繩子應該如何拉設，才能使所需繩子的總長度最短？ (5 分)

(2) 承第(1)題，所需 4 條繩子的總長度最短為多少公尺？ (5 分)

素養題

【解】(1) 如右圖，自 Q 點作 QR 垂直 $\overline{AB}$ 於 R 點

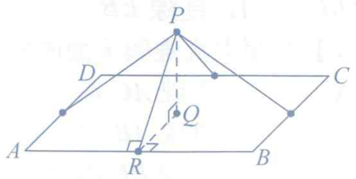
$\because\ \overline{PQ}\perp$ 平面 $ABCD$ 且 $\overline{QR}\perp\overline{AB}$

由三垂線定理可知 $\overline{PR}\perp\overline{AB}$，

即點 P 到 $\overline{AB}$ 有最小值 $\overline{PR}$，

因此 4 條繩子應由點 P 拉至正方形 $ABCD$ 各邊中點，

所需繩子的總長度會最短。



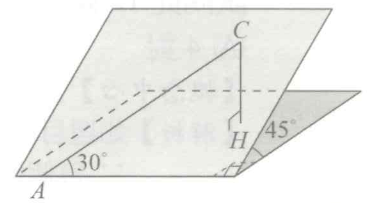
(2) 在直角 $\triangle PQR$ 中，

$\overline{PR}=\sqrt{\overline{PQ}^2+\overline{QR}^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$，

因此，4 條繩子的總長度最短為 $13\times4=52$ (公尺)。

【概念中心】三垂線定理的應用

2. 如右圖，有一斜坡平面和水平面成 45° 的二面角，在斜坡平面上有一條公路和二面角的稜成 30°。如果阿一沿此公路由 A 點向上行走 1000 公尺至 C 點，如右圖所示，那麼他應該垂直爬升了多少公尺？(即求 $\overline{CH}$ 之長)



素養題

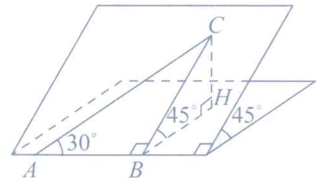
【解】如右圖，作 $\overline{HB}$ 垂直稜線於 B 點，連接 $\overline{CB}$，

由三垂線定理可得 $\overline{CB}$ 亦垂直邊界 AB 於 B 點，

因此，

$\overline{CH}=\overline{BC}\ \sin 45°=\overline{AC}\ \sin 30°\sin 45°$

$=1000\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=250\sqrt{2}$ 公尺。



【概念中心】兩面角、三垂線定理