1-2 空間向量的坐標表示法

年　班　號
姓名

一、單一選擇題：每題 6 分，共 12 分

(C) 1. 空間中，若平行四邊形 $ABCD$ 的三個頂點 $A(5,2,9)$，$B(1,6,5)$，$C(3,4,1)$，則第四個頂點 D 的坐標為何？
(A) $(-7,0,-5)$　(B) $(3,4,13)$　(C) $(7,0,5)$　(D) $(-1,8,-3)$　(E) $(9,12,15)$

【概念中心】向量的平行
【解析】設 $D(x,y,z)$
$\because$ $ABCD$ 為平行四邊形　$\therefore$ $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$
$\Rightarrow (x-3,y-4,z-1)=(5-1,2-6,9-5)$
$\Rightarrow (x,y,z)=(7,0,5)$，即 $D(7,0,5)$，
故選(C)。

(B) 2. 設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 是空間中的三個向量，r 是一個實數。已知 $\overrightarrow{a}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{b}=(0,0,1)$，若 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+r\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，則 r 不可能等於下列哪一個數值？
(A) $-\sqrt{2}$　(B) 0　(C) 1　(D) π (圓周率)　(E) 2021

【概念中心】向量的線性組合
【解析】$\because$ $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+r\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0} \Rightarrow r\overrightarrow{c}=-\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(-1,0,-1)\neq\overrightarrow{0}$
$\therefore$ $r\neq 0$
故選(B)。

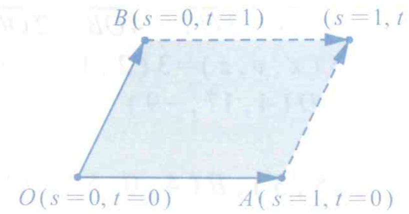
二、多重選擇題：每題 10 分，共 20 分

(ABCD) 3. 已知 $P(a,b,c)$ 為空間中一點，試問下列哪些選項是正確的？
(A) 點 P 在 x 軸上之投影點坐標為 $(a,0,0)$
(B) 點 P 在 xy 平面上之投影點坐標為 $(a,b,0)$
(C) 點 P 對 x 軸之對稱點坐標為 $(a,-b,-c)$
(D) 點 P 對 xy 平面之對稱點坐標為 $(a,b,-c)$
(E) 點 P 到 xy 平面的距離為 c

【概念中心】空間坐標系
【解析】(A) ○。
(B) ○。
(C) ○：設點 P 對 x 軸之對稱點為 $Q(x_1,y_1,z_1)$，
則 $\overline{PQ}$ 的中點為 $(a,0,0) \Rightarrow \left(\dfrac{a+x_1}{2},\dfrac{b+y_1}{2},\dfrac{c+z_1}{2}\right)=(a,0,0)$
$\Rightarrow (x_1,y_1,z_1)=(a,-b,-c)$。
(D) ○：設點 P 對 xy 平面之對稱點為 $R(x_2,y_2,z_2)$，
則 $\overline{PR}$ 的中點為 $(a,b,0) \Rightarrow \left(\dfrac{a+x_2}{2},\dfrac{b+y_2}{2},\dfrac{c+z_2}{2}\right)=(a,b,0)$
$\Rightarrow (x_2,y_2,z_2)=(a,b,-c)$。
(E) ×：點 P 到 xy 平面的距離為 $|c|$。
故選(A)(B)(C)(D)。

(AD) 4. 空間中，已知向量 $\overrightarrow{OA}=(2,3,6)$，$\overrightarrow{OB}=(5,-8,3)$，且 $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，若 P 點在 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 所展開的平行四邊形內部，則下列哪些選項是正確的？
(A) $s=\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$　(B) $s=\dfrac{1}{3}$，$t=-\dfrac{1}{2}$　(C) $s=-\dfrac{2}{3}$，$t=\dfrac{1}{2}$
(D) $s=\dfrac{2}{3}$，$t=\dfrac{2}{3}$　(E) $s=\dfrac{2}{3}$，$t=1$

【概念中心】向量的線性組合
【解析】$\because$ $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，
且 P 點在 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 所展開的平行四邊形內部
$\therefore$ $0<s<1$ 且 $0<t<1$
故選(A)(D)。



三、填充題：每格 8 分，共 48 分

1. 空間中，若一線段 $\overline{AB}$ 在 xy 平面、yz 平面和 zx 平面上的投影線段長度分別為 $\sqrt{21}$，4 和 $\sqrt{35}$，則 $\overline{AB}$ 的長度為 <u>6</u>。

【概念中心】空間向量的坐標表示法及長度
【解析】設 $\overrightarrow{AB}=(p,q,r)$，
依題意可得 $\begin{cases} p^2+q^2=21 \cdots\cdots ① \\ q^2+r^2=16 \cdots\cdots ② \\ r^2+p^2=35 \cdots\cdots ③ \end{cases}$，$\dfrac{①+②+③}{2}$ 得 $p^2+q^2+r^2=36$，
因此，所求 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{p^2+q^2+r^2}=\sqrt{36}=6$。

2. 空間中，已知 $O(0,0,0)$，$A(2,-1,2)$，$B(3,0,4)$，若 $\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，則：
(1) 當 $t=$ <u>$-\dfrac{14}{9}$</u> 時，$|\overrightarrow{OC}|$ 有最小值。
(2) 當 $t=$ <u>$\dfrac{5}{3}$</u> 時，$\overrightarrow{OC}$ 會平分 $\angle AOB$。

【概念中心】向量的線性組合及長度，角平分向量
【解析】(1) $\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(2t+3,-t,2t+4)$，
$\Rightarrow |\overrightarrow{OC}|=\sqrt{(2t+3)^2+(-t)^2+(2t+4)^2}=\sqrt{9t^2+28t+25}=\sqrt{9\left(t+\dfrac{14}{9}\right)^2+\dfrac{29}{9}}$，
當 $t=-\dfrac{14}{9}$ 時，$|\overrightarrow{OC}|$ 有最小值 $\sqrt{\dfrac{29}{9}}=\dfrac{\sqrt{29}}{3}$。
(2) $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3^2+0^2+4^2}=5$，
$\because$ $\overrightarrow{OC}$ 平分 $\angle AOB$　$\therefore$ $t|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$
$\Rightarrow 3t=5 \Rightarrow t=\dfrac{5}{3}$。

3. 空間中，若 $A(\sqrt{2},0,2)$，$B(-\sqrt{2},0,2)$，$C(-\sqrt{2},0,-2)$，$D(\sqrt{2},0,-2)$ 為一正立方體的其中四個頂點，則此正立方體的體積為 <u>$16\sqrt{2}$</u>。

【概念中心】空間中兩點的距離
【解析】如右圖，
$\overline{AB}=\overline{CD}=2\sqrt{2}$，$\overline{AD}=\overline{BC}=4$
$\because$ $4=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}$　$\therefore$ 此正立方體的邊長$=2\sqrt{2}$
因此，其體積$=(2\sqrt{2})^3=16\sqrt{2}$。