4. 已知 $A(2,1,-3)$，$B(1,-2,1)$，$C(1,3,2)$ 為空間中三點，若 D 為空間中另一點滿足 $3\overrightarrow{DA}-4\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$，則 D 點的坐標為 __$(4,17,-9)$__。

【概念中心】空間向量的加、減法與係數積

【解析】設 $D(x,y,z)$，O 為原點，

$3\overrightarrow{DA}-4\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow 3(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})-4(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})+2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}-4\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}$

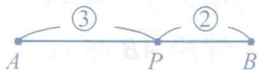
$\Rightarrow (x,y,z)=3(2,1,-3)-4(1,-2,1)+2(1,3,2)=(4,17,-9)$

即 $D(4,17,-9)$。

5. 設 $A(-1,5,3)$，$B(4,0,8)$ 為空間中兩點，P 為直線 AB 上一點，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$，則 P 點的坐標為 __$(2,2,6)$ 或 $(14,-10,18)$__。

【概念中心】分點公式

【解析】設 O 為原點，

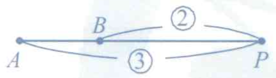


(1) 若 P 在 $\overline{AB}$ 上，則由分點公式可得

$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3+2}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{3+2}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{5}(-1,5,3)+\frac{3}{5}(4,0,8)=(2,2,6)$

$\therefore P(2,2,6)$

(2) 若 P 不在 $\overline{AB}$ 上，則 B 在 $\overline{AP}$ 上，且 $\overline{AB}:\overline{BP}=1:2$，



設 $P(x,y,z)$，由分點公式可得 $\overrightarrow{OB}=\frac{2}{1+2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{1+2}\overrightarrow{OP}$

$\Rightarrow (4,0,8)=\frac{2}{3}(-1,5,3)+\frac{1}{3}(x,y,z)=(\frac{x-2}{3},\frac{y+10}{3},\frac{z+6}{3})$

$\therefore (x,y,z)=(14,-10,18)$，即 $P(14,-10,18)$

因此，P 點的坐標為 $(2,2,6)$ 或 $(14,-10,18)$。

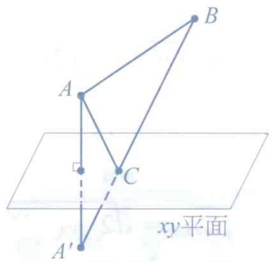
四、計算題：共 20 分

★1. 空間中，已知 $A(-1,2,1)$，$B(3,4,5)$，若 C 是 xy 平面上的一個動點，求：

(1) $\triangle ABC$ 周長的最小值為何？（4 分）

(2) 承第(1)題，當 $\triangle ABC$ 的周長有最小值時，C 點的坐標為何？（5 分）

【解】(1) 如右圖，



作點 A 對 xy 平面的對稱點 $A'(-1,2,-1)$，

則 $\overline{AC}+\overline{BC}$ 的最小值 $=\overline{A'B}$，

因此，

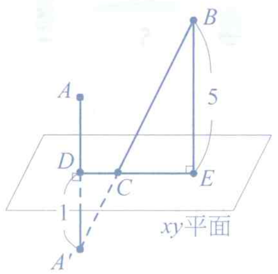
$\triangle ABC$ 周長的最小值

$=\overline{AB}+\overline{A'B}$

$=\sqrt{(3+1)^2+(4-2)^2+(5-1)^2}+\sqrt{(3+1)^2+(4-2)^2+(5+1)^2}$

$=6+2\sqrt{14}$。

(2) 如右圖，



點 A' 到 xy 平面的距離 $=\overline{A'D}=1$，

點 B 到 xy 平面的距離 $=\overline{BE}=5$

$\because \triangle CDA'\sim\triangle CEB$ $\therefore \overline{A'C}:\overline{BC}=\overline{A'D}:\overline{BE}=1:5$

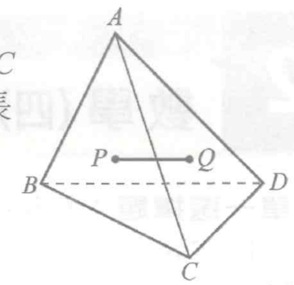
令 O 為原點，由分點公式可得

$\overrightarrow{OC}=\frac{5}{1+5}\overrightarrow{OA'}+\frac{1}{1+5}\overrightarrow{OB}=\frac{5}{6}(-1,2,-1)+\frac{1}{6}(3,4,5)=(-\frac{1}{3},\frac{7}{3},0)$，

即 $C(-\frac{1}{3},\frac{7}{3},0)$。

【概念中心】對稱點的應用，分點公式

★2. 學校蓋了一座邊長為 15 公尺的正四面體玻璃溫室，如右圖。小南想要在室內架設一根鋼條，作為吊花的橫樑，鋼條的兩端分別固定在兩面牆 ABC 和 ACD 的重心 P，Q 處。為了方便工人製作，小南想要先計算出鋼條的長度，但由於直接爬到 P，Q 測量長度十分困難，因此他想到可以先將 $\overrightarrow{PQ}$ 寫成 $x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AC}$ 就可以很容易地求出 $\overline{PQ}$ 的長度了。請你依下列各小題的步驟，一步一步將 $\overline{PQ}$ 的長度求出來：



(1) 若 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，求數對 (m,n)。（3 分）

(2) 若 $\overrightarrow{PQ}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}$，求序對 (x,y,z)。（4 分）

(3) 試計算 $\overline{PQ}$ 的長度。（4 分）

素養題

【解】(1) $\because P$ 為 $\triangle ABC$ 的重心

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

因此，數對 $(m,n)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$。

(2) $\because Q$ 為 $\triangle ACD$ 的重心 $\therefore \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

又 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD})-(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，

因此，序對 $(x,y,z)=(-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3})$。

(3) $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$，

因此，$\overline{PQ}$ 的長度 $|\overrightarrow{PQ}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{BD}|=\frac{1}{3}\times 15=5$（公尺）。

【概念中心】向量的線性組合