數學(四) A

1-3 空間向量的內積

年　班　號

姓名

一、單一選擇題： 每題 6 分，共 12 分

(C) 1. 已知空間中兩向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 滿足 $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=6$，$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 60°，則 $|3\vec{a}+2\vec{b}|=$

(A) $2\sqrt{6}$　(B) 12　(C) $12\sqrt{3}$　(D) 24　(E) 26

【概念中心】內積的運算性質

【解析】$\because |3\vec{a}+2\vec{b}|^2=(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}+2\vec{b})=9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=9\times16+12\times4\times6\times\cos 60^\circ+4\times36=432$

$\therefore |3\vec{a}+2\vec{b}|=12\sqrt{3}$

故選(C)。

(E) 2. 設 m，n 為實數，若 $\sqrt{200^2+300^2+400^2}+\sqrt{12^2+m^2+n^2}=\sqrt{212^2+(300+m)^2+(400+n)^2}$，則 n 的值為

(A) -24　(B) 0　(C) 12　(D) 18　(E) 24

【概念中心】三角不等式

【解析】令 $\vec{a}=(200,300,400)$，$\vec{b}=(12,m,n)$，

則 $|\vec{a}|=\sqrt{200^2+300^2+400^2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{12^2+m^2+n^2}$，

$\vec{a}+\vec{b}=(212,300+m,400+n)\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{212^2+(300+m)^2+(400+n)^2}$，

依題意可知，$|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$，

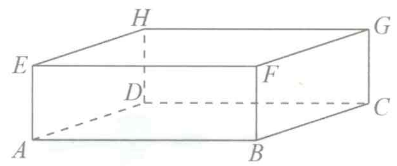
因此，$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 同向（三角不等式等號成立的條件）

$\therefore \dfrac{12}{200}=\dfrac{m}{300}=\dfrac{n}{400}\Rightarrow n=24$

故選(E)。

二、多重選擇題： 每題 10 分，共 20 分

(A C D) 3. 如右圖，長方體 $ABCD$-$EFGH$ 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{AD}=2$，$\overline{AE}=1$，試問下列哪些內積的值為正數？

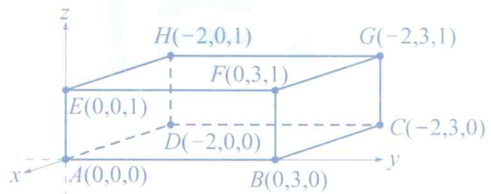


(A) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{DH}$　(B) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{GE}$　(C) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EC}$

(D) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{HB}$　(E) $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{CG}$

【概念中心】坐標空間中的內積

【解析】如右圖，建立空間坐標系，



令 $A(0,0,0)$，$B(0,3,0)$，$C(-2,3,0)$，$D(-2,0,0)$，$E(0,0,1)$，$F(0,3,1)$，$G(-2,3,1)$，$H(-2,0,1)$。

(A) ○：$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{DH}=(-2,0,1)\cdot(0,0,1)=1>0$。

(B) ×：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{GE}=(-2,3,0)\cdot(2,-3,0)=-4-9=-13<0$。

(C) ○：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EC}=(-2,3,0)\cdot(-2,3,-1)=4+9=13>0$。

(D) ○：$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{HB}=(0,3,1)\cdot(2,3,-1)=9-1=8>0$。

(E) ×：$\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{CG}=(-2,0,0)\cdot(0,0,1)=0$。

故選(A)(C)(D)。

(B E) 4. 若 $\vec{a}=(-2,1,1)$，$\vec{b}=(-1,2,z)$ 的夾角為 60°，則實數 z 的值可能為

(A) $-\dfrac{7}{2}$　(B) -1　(C) 0　(D) $\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2}$　(E) 17

【概念中心】向量的夾角

【解析】依題意可得 $\cos60^\circ=\dfrac{2+2+z}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{1+4+z^2}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{z+4}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{z^2+5}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4}=\dfrac{(z+4)^2}{6(z^2+5)}$

$\Rightarrow z^2-16z-17=0$

$\Rightarrow (z+1)(z-17)=0$

$\Rightarrow z=-1$ 或 17，

當 $z=-1$ 時，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2+2-1=3>0$。

當 $z=17$ 時，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2+2+17=21>0$。

故選(B)(E)。

三、填充題： 每格 8 分，共 48 分

1. 空間中，$A(2,1,1)$，$B(-2,2,-4)$，O 為原點，則 $\angle AOB=$ ___120___ 度。

【概念中心】向量的內積

【解析】$\overrightarrow{OA}=(2,1,1)$，$\overrightarrow{OB}=(-2,2,-4)$

$\because \cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{-4+2-4}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{4+4+16}}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore \angle AOB=120^\circ$

2. 空間中，已知兩點 $A(1,2,-1)$，$B(2,0,1)$，O 為原點，若點 C 滿足 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$ 且 $\overrightarrow{BC}\,//\,\overrightarrow{OA}$，則 C 點的坐標為 ___(−3,−10,6)___。

【概念中心】向量的平行與垂直判定

【解析】設 $C(x,y,z)$

$\because \overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OB}$　$\therefore \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\Rightarrow (x,y,z)\cdot(2,0,1)=2x+z=0$……①，

又 $\overrightarrow{BC}\,//\,\overrightarrow{OA}$　$\therefore \overrightarrow{BC}=t\cdot\overrightarrow{OA}$，其中 t 為實數

$\Rightarrow (x-2,y,z-1)=t(1,2,-1)$

$\Rightarrow \begin{cases} x=2+t \\ y=2t \\ z=1-t \end{cases}$，其中 t 為實數……②，

②代入①得 $2(2+t)+(1-t)=0\Rightarrow t=-5$，

因此，$C(2-5,2\cdot(-5),1+5)=(-3,-10,6)$。