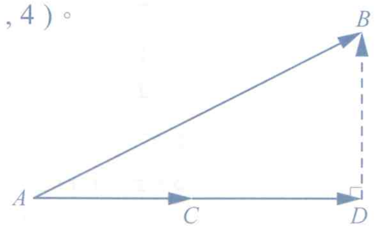
3. 已知空間中三點 $A(1,2,3)$，$B(5,-3,5)$，$C(2,0,5)$。
(1) 則 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影為 $\underline{(2,-4,4)}$ 。
(2) B 點在直線 AC 上的投影點坐標為 $\underline{(3,-2,7)}$ 。
(3) 若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$，其中 $\overrightarrow{u}\,/\!/\,\overrightarrow{AC}$ 且 $\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{AC}$，則 $\overrightarrow{v}=\underline{(2,-1,-2)}$ 。

【概念中心】正射影
【解析】$\overrightarrow{AB}=(4,-5,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-2,2)$。

(1) 所求 $=\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\right)\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{4+10+4}{1+4+4}\right)(1,-2,2)=(2,-4,4)$。



(2) 設 B 點在直線 AC 上的投影點為 $D(x,y,z)$，
則 $\overrightarrow{AD}=(x-1,y-2,z-3)=(2,-4,4)$
$\Rightarrow(x,y,z)=(3,-2,7)$，即 $D(3,-2,7)$。
(3) $\overrightarrow{u}$ 即為 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影 $=(2,-4,4)$，
$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{u}=(4,-5,2)-(2,-4,4)=(2,-1,-2)$。

4. 設 a,b,c 為實數，若 $a+b+c=4$，則 $(a+1)^2+(b-2)^2+(c+3)^2$ 的最小值為 $\underline{12}$ 。

【概念中心】柯西不等式
【解析】由柯西不等式可得

$\left[(a+1)^2+(b-2)^2+(c+3)^2\right](1^2+1^2+1^2)\geq\left[(a+1)+(b-2)+(c+3)\right]^2$

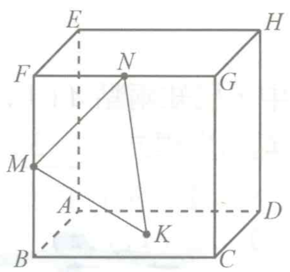
$\Rightarrow\left[(a+1)^2+(b-2)^2+(c+3)^2\right]\times3\geq(a+b+c+2)^2=(4+2)^2=36$

$\Rightarrow\left[(a+1)^2+(b-2)^2+(c+3)^2\right]\geq\dfrac{36}{3}=12$

$\therefore(a+1)^2+(b-2)^2+(c+3)^2$ 的最小值 $=12$

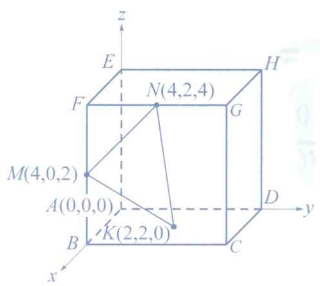
四、計算題：共 20 分

★1. 如右圖，正立方體 $ABCD\text{-}EFGH$ 的邊長為 4，K 為正方形 $ABCD$ 的中心（兩對角線的交點），M,N 分別為 $\overline{BF},\overline{FG}$ 的中點，試求：



(1) $\angle KMN$ 的度數。 （5 分）
(2) $\triangle KMN$ 的面積。 （3 分）

【解】(1) 如右圖，建立空間坐標系，



令 $A(0,0,0)$，$K(2,2,0)$，
$M(4,0,2)$，$N(4,2,4)$，
則 $\overrightarrow{MK}=(-2,2,-2)$，
$\overrightarrow{MN}=(0,2,2)$

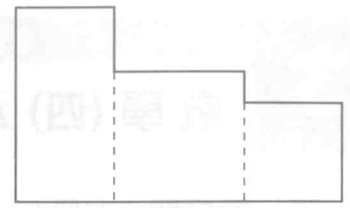
$\because\cos\angle KMN=\dfrac{0+4-4}{\sqrt{4+4+4}\cdot\sqrt{0+4+4}}$
$=0$

$\therefore\angle KMN=90^\circ$

(2) 由(1)可知，$\triangle KMN$ 為直角三角形，
因此，$\triangle KMN$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\,\overline{MK}\times\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{2}=2\sqrt{6}$ 。

【概念中心】向量的內積

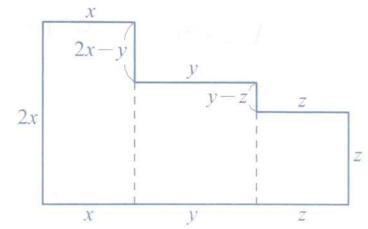
★ 2. 右圖是小南在美術課所設計的一個圖案。這個圖案是由兩個正方形以及一個長寬比為 2 比 1 的長方形組合而成。已知長方形的長比兩個正方形的邊長大且中間的正方形不小於右邊的正方形，而這個圖案的面積為 104 平方公分。



素養題

(1) 設長方形的寬為 x 公分，中間、右邊兩正方形的邊長分別為 y 公分、z 公分，試以 x,y,z 表示這個圖案外圍的周長。 （4 分）
(2) 試問這個圖案外圍的最大周長是多少公分？ （8 分）

【解】(1) 如右圖，
這個圖案外圍的周長 $=6x+2y+2z$（公分）。



(2) 依題意可知 $2x^2+y^2+z^2=104$，
因此，由柯西不等式可得
$\left[(\sqrt{2}\,x)^2+y^2+z^2\right]\left[(3\sqrt{2})^2+2^2+2^2\right]\geq(6x+2y+2z)^2$
$\Rightarrow104\times26\geq(6x+2y+2z)^2$
$\Rightarrow6x+2y+2z\leq52$
$\therefore$ 所求圖案外圍的最大周長是 52 公分

【概念中心】柯西不等式