數學(四)A 1-4 外積、體積與行列式

年　班　號

姓名

一、單一選擇題：每題 6 分，共 12 分

(B) 1. 若 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix}=3$，$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}=2$，則 $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -2d & -2e & -2f \\ 4x+\alpha & 4y+\beta & 4z+\gamma \end{vmatrix}$ 之值為何？

(A) -120　(B) -84　(C) -30　(D) 5　(E) 24

【概念中心】三階行列式的性質

【解析】$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -2d & -2e & -2f \\ 4x+\alpha & 4y+\beta & 4z+\gamma \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -2d & -2e & -2f \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -2d & -2e & -2f \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$

$=3\times(-2)\times4\times\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix}+3\times(-2)\times\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$

$=3\times(-2)\times4\times3+3\times(-2)\times2=-84$，

故選(B)。

(C) 2. 若三實數 x,y,z 滿足 $x^2+y^2+z^2=12$，則 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 的最大值為何？

(A) 8　(B) $\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$　(C) 48　(D) $28\sqrt{3}$　(E) 2352

【概念中心】三階行列式與平行六面體體積

【解析】令 $\overrightarrow{a}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{b}=(1,-2,3)$，$\overrightarrow{c}=(3,2,1)$，

則 $\left|\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right|$ 表示 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 所張開的平行六面體體積，

當向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 所決定的平面垂直時，其體積有最大值

$=|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}|\times|\overrightarrow{a}|=\sqrt{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}^2}\times\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$=8\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=48$，

故選(C)。

二、多重選擇題：每題 10 分，共 20 分

(A B C D E) 3. 設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 是空間中兩個不平行的非零向量，試選出正確的選項。

(A) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{a}$

(B) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp3\overrightarrow{b}$

(C) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$

(D) $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp(2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b})$

(E) 若非零向量 $\overrightarrow{n}$ 滿足 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{a}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{n}\,//\,(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$

【概念中心】空間向量的外積

【解析】∵ $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$ 是 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的一個公垂向量

∴ $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$ 會與 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 的線性組合 $\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}$ ($\alpha,\beta\in R$) 垂直

又向量 $\overrightarrow{n}$ 滿足 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{a}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{b}$

∴ $\overrightarrow{n}$ 也是 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的一個公垂向量

因此，$\overrightarrow{n}\,//\,(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$

故選(A)(B)(C)(D)(E)。

(A C D) 4. 下列哪些行列式的值與 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 的值相等？

(A) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$　(B) $\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$　(C) $\begin{vmatrix} c_3 & b_3 & a_3 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_1 & b_1 & a_1 \end{vmatrix}$

(D) $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3 \\ b_1-c_1 & b_2-c_2 & b_3-c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$　(E) $\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_2b_2 & a_3b_3 \\ b_1c_1 & b_2c_2 & b_3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

【概念中心】三階行列式的性質

【解析】(A) ○：行列互換，其值不變。

(B) ×：$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$。

(C) ○：$\begin{vmatrix} c_3 & b_3 & a_3 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_1 & b_1 & a_1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$。

(D) ○：$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3 \\ b_1-c_1 & b_2-c_2 & b_3-c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\times1=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\times1=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$。

(E) ×：$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_2b_2 & a_3b_3 \\ b_1c_1 & b_2c_2 & b_3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$=a_1b_1b_2c_2c_3+a_3b_1b_3c_1c_2+a_2b_2b_3c_1c_3-a_3b_2b_3c_1c_2-a_1b_1b_3c_2c_3-a_2b_1b_2c_1c_3$

$\neq\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$。

故選(A)(C)(D)。

南一 A 卷