三、填充題：每格 8 分，共 48 分

1. 試求下列各行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 20 & 30 & 40 \\ 47 & 53 & 97 \\ 14 & 21 & 28 \end{vmatrix} =$ ___0___ 。　(2) $\begin{vmatrix} 2021 & 2020 & 2020^2 \\ 2022 & 2021 & 2021^2 \\ 2023 & 2022 & 2022^2 \end{vmatrix} =$ ___2___ 。

【概念中心】三階行列式的性質

【解析】(1) $\begin{vmatrix} 20 & 30 & 40 \\ 47 & 53 & 97 \\ 14 & 21 & 28 \end{vmatrix} = 10\times 7\times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 47 & 53 & 97 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$（第一列提出 10，第三列提出 7）

$= 70\times 0$（第一列、第三列成比例）$= 0$。

(2) $\begin{vmatrix} 2021 & 2020 & 2020^2 \\ 2022 & 2021 & 2021^2 \\ 2023 & 2022 & 2022^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2020 & 2020^2 \\ 1 & 2021 & 2021^2 \\ 1 & 2022 & 2022^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2020 & 2020^2 \\ 0 & 1 & 2021^2-2020^2 \\ 0 & 2 & 2022^2-2020^2 \end{vmatrix}$

$= 1\times \begin{vmatrix} 1 & 4041\times 1 \\ 2 & 4042\times 2 \end{vmatrix} - 0\times \begin{vmatrix} 2020 & 2020^2 \\ 2 & 4042\times 2 \end{vmatrix} + 0\times \begin{vmatrix} 2020 & 2020^2 \\ 1 & 4041\times 1 \end{vmatrix}$

$= 2$。　（依第一行降階展開）

2. 已知 $\overrightarrow{u} = (1, -1, 0)$，$\overrightarrow{v} = (3, 4, -4)$，若 $\overrightarrow{w}$ 為 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的公垂向量，且 $|\overrightarrow{w}| = 9$，則向量 $\overrightarrow{w} =$ ___(4, 4, 7) 或 (−4, −4, −7)___ 。

【概念中心】外積與公垂向量

【解析】$\because (\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{u}$ 且 $(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{v}$　$\therefore \overrightarrow{w} \,/\!/\, (\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})$

$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right) = (4, 4, 7)$，

令 $\overrightarrow{w} = t(4, 4, 7) = (4t, 4t, 7t)$，$t\in R$

$\because |\overrightarrow{w}| = 9 \Rightarrow \sqrt{(4t)^2+(4t)^2+(7t)^2} = 9 \Rightarrow 9|t| = 9 \Rightarrow t = \pm 1$

$\therefore \overrightarrow{w} = (4, 4, 7)$ 或 $(-4, -4, -7)$

3. 已知空間中四點 $A(2, 4, 1)$，$B(1, 2, 3)$，$C(6, 2, 4)$，$D(-1, 3, k)$。

(1) $\triangle ABC$ 的面積＝ ___$\frac{15}{2}$___ 。

(2) 若 A, B, C, D 四點共平面，則實數 k 之值＝ ___$\frac{3}{2}$___ 。

【概念中心】外積長度與三角形面積，共平面的判斷

【解析】(1) $\overrightarrow{AB} = (-1, -2, 2)$，$\overrightarrow{AC} = (4, -2, 3)$

$\because \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \right) = (-2, 11, 10)$

$\therefore \triangle ABC$ 的面積$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+11^2+10^2} = \frac{15}{2}$

(2) $\overrightarrow{AD} = (-3, -1, k-1)$

$\because A, B, C, D$ 四點共平面　$\therefore \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ 共平面

因此，$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & k-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(k-1) - 8 + 18 - 12 - 3 + 8(k-1) = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$。

4. 已知空間中三向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 所張開的平行六面體體積為 5，則 $3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$，$4\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{c}$ 三向量所張開的平行六面體體積＝ ___60___ 。

【概念中心】平行六面體體積與行列式的性質

【解析】設 $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$，$\overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3)$，依題意可知 $\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right| = 5$，

則 $3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b} = (3a_1-2b_1, 3a_2-2b_2, 3a_3-2b_3)$，$4\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c} = (4b_1+c_1, 4b_2+c_2, 4b_3+c_3)$，

由 $3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}$，$4\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{c}$ 三向量所展成的平行六面體體積

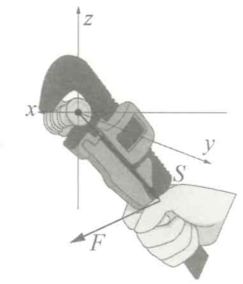
$= \left|\begin{vmatrix} 3a_1-2b_1 & 3a_2-2b_2 & 3a_3-2b_3 \\ 4b_1+c_1 & 4b_2+c_2 & 4b_3+c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right| \xrightarrow{\times(-1)} = \left|\begin{vmatrix} 3a_1-2b_1 & 3a_2-2b_2 & 3a_3-2b_3 \\ 4b_1 & 4b_2 & 4b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$

$= 4\times \left|\begin{vmatrix} 3a_1-2b_1 & 3a_2-2b_2 & 3a_3-2b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right| \xrightarrow{\times 2} = 4\times \left|\begin{vmatrix} 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right| = 12\times \left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$

$= 12\times 5 = 60$。

四、計算題：共 20 分

★1. 如右圖，小南使用板手旋轉螺帽，若以螺帽重心的支點作為空間坐標系的原點，可得支點到施力點的向量 $\overrightarrow{S} = (-2, 4, -4)$，施力 $\overrightarrow{F} = (4, 2, -4)$。



(1) 試求小南使用板手產生的力矩 $\overrightarrow{M}$ 為何？(已知力矩 $\overrightarrow{M}$ ＝力臂 $\overrightarrow{S}$ ×力 $\overrightarrow{F}$)（4 分）

(2) 承第(1)題，力矩 $\overrightarrow{M}$ 的大小為何？（3 分）

(3) 力矩 $\overrightarrow{M}$ 是否會與施力 $\overrightarrow{F}$ 垂直？請詳細說明理由。（5 分）

素養題

【解】(1) $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{S}\times\overrightarrow{F} = \left(\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-8, -24, -20)$。

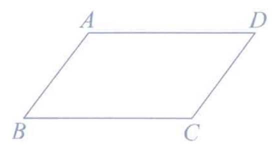
(2) 所求$= |\overrightarrow{M}| = \sqrt{(-8)^2+(-24)^2+(-20)^2} = \sqrt{4^2\times(2^2+6^2+5^2)} = 4\sqrt{65}$。

(3) $\because \overrightarrow{M}\cdot\overrightarrow{F} = (-8, -24, -20)\cdot(4, 2, -4) = -32-48+80 = 0$

$\therefore \overrightarrow{M} \perp \overrightarrow{F}$

【概念中心】外積的應用

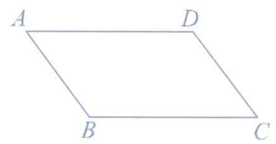
2. 已知空間中一平行四邊形 $ABCD$，若 $\overrightarrow{AB} = (2, 2, -1)$，$|\overrightarrow{AD}| = 5\sqrt{2}$ 且 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = (10, -11, -2)$，則 $\angle BAD$ 的大小為何？（8 分）



【解】$\because |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\sin(\angle BAD)$

$\Rightarrow \sqrt{10^2+(-11)^2+(-2)^2} = \sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\times 5\sqrt{2}\times\sin(\angle BAD)$

$\Rightarrow \sin(\angle BAD) = \frac{1}{\sqrt{2}}$



$\therefore \angle BAD = 45°$ 或 $135°$

【概念中心】外積長度與平行四邊形面積