數學 (四) A　第一章　復　習

年　班　號

姓名

一、選擇題：每題 8 分，共 32 分

(E) 1. 空間中，設 O 為原點，$A(2,1,-3)$，$B(1,-2,1)$，若集合
$S=\{P \mid \overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}，-1\le\alpha\le1，0\le\beta\le3\}$，則集合 S 所表示的圖形之面積為何？
(A) 6　(B) $5\sqrt{3}$　(C) $15\sqrt{3}$　(D) 30　(E) $30\sqrt{3}$　(單選)

【概念中心】線性組合與平行四邊形面積

【解析】$\overrightarrow{OA}=(2,1,-3)$，$\overrightarrow{OB}=(1,-2,1)$，
依題意可知，集合 S 所表示的圖形是一個平行四邊形，
其面積 $=[1-(-1)]\times(3-0)\times|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=6\times\sqrt{\begin{vmatrix}1&-3\\-2&1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-3&2\\1&1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2&1\\1&-2\end{vmatrix}^2}=30\sqrt{3}$，
故選(E)。

(A C D E) 2. 空間中，已知向量 $\overrightarrow{u}=(1,2,-2)$，試問下列哪些選項是正確的？　(多選)
(A) 可以找到向量 $\overrightarrow{v}$，使得 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\sqrt{5}$
(B) 可以找到向量 $\overrightarrow{v}$，使得 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(1,3,4)$
(C) 若向量 $\overrightarrow{v}$ 滿足 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$ 且 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$，則 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$
(D) 若非零向量 $\overrightarrow{v}$ 滿足 $|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|=3|\overrightarrow{v}|$，則 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$
(E) 若非零向量 $\overrightarrow{v}$ 滿足 $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=3|\overrightarrow{v}|$，則 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$

【概念中心】內積與外積的性質

【解析】(A) ○：若 $\overrightarrow{v}=(\sqrt{5},0,0)$，則 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\sqrt{5}+0+0=\sqrt{5}$。

(B) ×：設 $\overrightarrow{v}=(a,b,c)$，若 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(1,3,4)$，則 $\left(\begin{vmatrix}2&-2\\b&c\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&1\\c&a\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\a&b\end{vmatrix}\right)=(1,3,4)$，
$\Rightarrow(2b+2c,-2a-c,-2a+b)=(1,3,4)\Rightarrow\begin{cases}b+c=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots①\\-2a-c=3\cdots\cdots②\\-2a+b=4\cdots\cdots③\end{cases}$，
③－② 得 $b+c=1\cdots\cdots④$，④－① 得 $0=\dfrac{1}{2}$(不合)，因此，不存在向量 $\overrightarrow{v}$，
使得 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(1,3,4)$。

(C) ○：設向量 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的夾角為 θ，
依題意得 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\theta=0\Rightarrow|\overrightarrow{v}|=0$ 或 $\theta=90°$，
且 $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\sin\theta=0\Rightarrow|\overrightarrow{v}|=0$ 或 $\theta=0°$ 或 $\theta=180°$，
因此可得 $|\overrightarrow{v}|=0\Rightarrow\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$。

(D) ○：設向量 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的夾角為 θ，
若 $|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|=3|\overrightarrow{v}|\Rightarrow3|\overrightarrow{v}||\cos\theta|=3|\overrightarrow{v}|\Rightarrow|\cos\theta|=1$
$\therefore\ \theta=0°$ 或 $180°\Rightarrow\overrightarrow{u}\,/\!/\,\overrightarrow{v}$，因此，$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$

(E) ○：設向量 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的夾角為 θ，若 $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=3|\overrightarrow{v}|\Rightarrow3|\overrightarrow{v}|\sin\theta=3|\overrightarrow{v}|\Rightarrow\sin\theta=1$
$\therefore\ \theta=90°\Rightarrow\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$，因此，$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$
故選(A)(C)(D)(E)。

(C) 3. 設 $\overrightarrow{a}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{b}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{c}=(x,y,z)$ 是空間中三個非零向量，若 $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}$ 且 $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{b}$，則 $\dfrac{2xy-3yz+4zx}{x^2+y^2+z^2}$ 之值為何？
(A) -1　(B) 0　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) 1　(E) $\dfrac{5}{3}$　(單選)

【概念中心】外積與公垂向量

【解析】$\because\ (\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{a}$ 且 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$　$\therefore\ \overrightarrow{c}\,/\!/\,(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})=\left(\begin{vmatrix}0&1\\-1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\1&-1\end{vmatrix}\right)=(1,1,-1)$
令 $\overrightarrow{c}=t(1,1,-1)=(t,t,-t)$，$t\in\mathbb{R}$ 且 $t\neq0$，
因此，$\dfrac{2xy-3yz+4zx}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{2t^2+3t^2-4t^2}{t^2+t^2+t^2}=\dfrac{1}{3}$，
故選(C)。

(B C D E) 4. 已知空間中相異四點 $O(0,0,0)$，$A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，$C(x_3,y_3,z_3)$，
若 $\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=k$，則下列哪些選項是正確的？　(多選)
(A) $\triangle ABC$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}|k|$
(B) 若 O,A,B,C 四點共平面，則 $k=0$
(C) 若 $k=0$，則 O,A,B,C 四點共平面
(D) 若 $\overrightarrow{OC}\perp(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})$，則 $k=0$
(E) 若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，則 $k=0$

【概念中心】三階行列式與平行六面體體積

【解析】(A) ×：$\triangle ABC$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\neq\dfrac{1}{2}|k|$。

(B) ○：若 O,A,B,C 四點共平面，則 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 所展成的平行六面體體積為 0，
即 $\left|\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}\right|=0\Rightarrow k=0$。

(C) ○：若 $k=0$，即 $\left|\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}\right|=0\Rightarrow\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 所展成的平行六面體體積為 0，
因此，O,A,B,C 四點共平面。

(D) ○：若 $\overrightarrow{OC}\perp(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})$，則 $\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})=0$
$\Rightarrow\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 所展成的平行六面體體積 $=|\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})|=0$，
即 $\left|\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}\right|=0\Rightarrow k=0$。

(E) ○：若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}\Rightarrow(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3,z_1+z_2+z_3)=(0,0,0)$
$\therefore\ k=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}\begin{matrix}\\(\times1)\\(\times1)\end{matrix}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_1+x_2+x_3&y_1+y_2+y_3&z_1+z_2+z_3\end{vmatrix}$
$=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\0&0&0\end{vmatrix}=0$
故選(B)(C)(D)(E)。