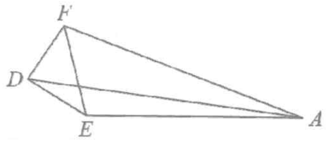
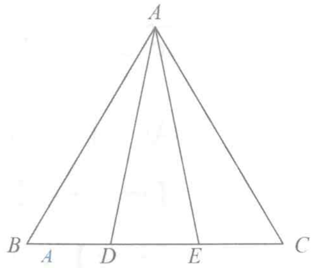
二、填充題：每格 8 分，共 48 分

1. 如右圖，有一張正三角形紙 ABC，其中 D, E 為 $\overline{BC}$ 的三等分點。今將此正三角形紙張沿著 $\overline{AD}$，$\overline{AE}$ 摺起，使得 B, C 兩點重合，令此重合點為 F 點。若平面 AFD 與平面 AFE 所成的銳夾角為 θ，

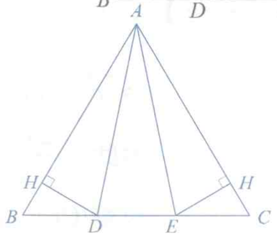




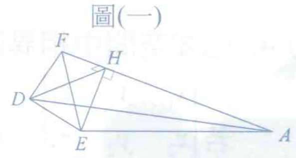
則 $\cos\theta =$ $\underline{\ \frac{1}{3}\ }$。　【概念中心】兩面角

【解析】如右圖(二)，在四面體 $FADE$ 中，
作 $\overline{EH} \perp \overline{AF}$ 交 $\overline{AF}$ 於 H，連接 $\overline{DH}$，則 $\overline{DH} \perp \overline{AF} \Rightarrow \angle DHE = \theta$，
如右圖(一)，設正三角形 ABC 的邊長為 3，
則 $\triangle ACE$ 面積 $= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{EH} = \frac{1}{3}(\triangle ABC$ 面積$) \Rightarrow \overline{EH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，
如圖(二)，在 $\triangle DHE$ 中，$\overline{HD} = \overline{HE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\overline{DE} = 1$

$$\therefore \cos\theta = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 1^2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$$



圖(一)



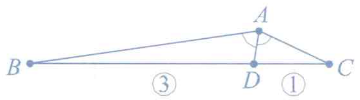
圖(二)

2. 已知空間中三點 $A(2, -1, 1)$，$B(-1, 2, 4)$，$C(1, 1, 2)$。
(1) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影為 $\underline{\ (-2, 4, 2)\ }$。
(2) 點 B 到直線 AC 的距離為 $\underline{\ \sqrt{3}\ }$。　【概念中心】正射影、空間中點到直線的距離

【解析】$\overrightarrow{AB} = (-3, 3, 3)$，$\overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1)$。
(1) 所求 $= (\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2})\overrightarrow{AC} = (\frac{3+6+3}{1+4+1})(-1, 2, 1) = (-2, 4, 2)$。
(2) 設點 B 在直線 AC 上的投影點為 D，則 $\overrightarrow{AD} = (-2, 4, 2)$，
所求 $= \overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{(9+9+9)-(4+16+4)} = \sqrt{3}$。

★ 3. 設 $A(1, 0, -1)$，$B(5, -1, 0)$，$C(0, 1, -1)$ 為空間中三點，若 $\angle BAC$ 的角平分線交直線 BC 於 D 點，則 D 點的坐標為 $\underline{\ (\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4})\ }$。　【概念中心】分點公式

【解析】$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$，
依題意可得，$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{BA} : \overline{CA} = 3 : 1$，
由分點公式得 D 點的坐標為 $(\frac{3\times0+1\times5}{3+1}, \frac{3\times1+1\times(-1)}{3+1}, \frac{3\times(-1)+1\times0}{3+1}) = (\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$。

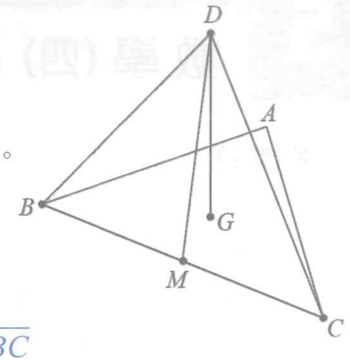


★ 4. 已知 $P(a, b, c)$ 為坐標空間第一卦限中一點(即 a, b, c 均為正數)，且 P 與點 $Q(1, 2, 3)$ 的距離為 $2\sqrt{3}$，試問：
(1) 點 P 到三個坐標平面 (xy 平面、yz 平面、xz 平面) 距離和的最大值為 $\underline{\ 12\ }$。
(2) 承第(1)題，當 P 點到三個坐標平面的距離和有最大值時，P 點的坐標為 $\underline{\ (3, 4, 5)\ }$。

【解析】(1) $\because \overline{PQ} = \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2} = 2\sqrt{3}$　$\therefore (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 12$
點 P 到三個坐標平面的距離和 $= a+b+c$，
由柯西不等式得　【概念中心】柯西不等式
$[(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2][1^2+1^2+1^2] \geq [(a-1)+(b-2)+(c-3)]^2$
$\Rightarrow 12 \times 3 \geq (a+b+c-6)^2 \Rightarrow a+b+c-6 \leq 6 \Rightarrow a+b+c \leq 12$，
因此，所求最大值 $= 12$。
(2) 當 P 點到三個坐標平面的距離和有最大值時，
令 $\frac{a-1}{1} = \frac{b-2}{1} = \frac{c-3}{1} = t \Rightarrow a = t+1$，$b = t+2 =$，$c = t+3$，
代入 $a+b+c = 12$ 得 $(t+1)+(t+2)+(t+3) = 12 \Rightarrow t = 2$，
因此，P 點坐標為 $(2+1, 2+2, 2+3) = (3, 4, 5)$。

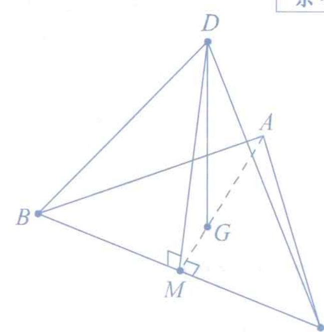
三、計算與混合題：共 20 分

1. 為了百年校慶活動，活動負責人小南規劃於校慶月期間在操場中央設置一個三角形大舞臺，並且在此三角形舞臺的重心 G 處垂直(舞臺面)豎立一根長為 8 公尺的旗竿 $\overline{DG}$，另外還要在 D, B 之間、D, C 之間與 D, M (M 為 $\overline{BC}$ 中點) 之間用棉繩連接來懸掛各班的班旗，如右圖所示。已知 $\overline{AB} = \overline{AC} = 30$ 公尺，$\overline{BC} = 48$ 公尺，試問小南至少應準備多長的棉線？(即求 $\overline{DB} + \overline{DC} + \overline{DM}$ 的長度)　(8 分)



素養題

【解】$\because \overline{AB} = \overline{AC}$　$\therefore \overline{GM} \perp \overline{BC}$
$\because \overline{DG} \perp$ 平面 ABC 且 $\overline{GM} \perp \overline{BC}$　$\therefore$ 由三垂線定理可得 $\overline{DM} \perp \overline{BC}$
在直角 $\triangle ACM$ 中，$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CM}^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$
$\because G$ 為 $\triangle ABC$ 的重心　$\therefore \overline{GM} = \frac{1}{3}\overline{AM} = \frac{1}{3} \times 18 = 6$
在直角 $\triangle DGM$ 中，$\overline{DM} = \sqrt{\overline{DG}^2 + \overline{GM}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$，
在直角 $\triangle DCM$ 中，$\overline{DC} = \sqrt{\overline{DM}^2 + \overline{CM}^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$，
因此，$\overline{DB} + \overline{DC} + \overline{DM} = 2\overline{DC} + \overline{DM} = 52 + 10 = 62$ (公尺)。
【概念中心】三垂線定理



★ 2. 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$。

(1) 試證明三階行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-a)$。　(10 分)

(2) 若 a, b, c 為 $\triangle ABC$ 的三邊長，且 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$，則 $\triangle ABC$ 必為　(單選題，2 分)

(A) 正三角形　(B) 等腰三角形　(C) 直角三角形
(D) 銳角三角形　(E) 鈍角三角形

答：$\underline{\ \ B\ \ }$

【解】(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-1) \\ \times(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$

$= 1 \times \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} a & a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} a & a^2 \\ b-a & b^2-a^2 \end{vmatrix}$

(依第一行降階展開)

$= \begin{vmatrix} b-a & (b+a)(b-a) \\ c-a & (c+a)(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a)[(c+a)-(b+a)] = (b-a)(c-a)(c-b)$ 得證。

(2) $\because \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (b-a)(c-a)(c-b) = 0$　$\therefore b = a$ 或 $c = a$ 或 $c = b$

因此，$\triangle ABC$ 必為等腰三角形，故選(B)。
【概念中心】三階行列式的性質