6 南一版・高中｜學習評量 數學(四) A

2-1 平面方程式

年　班　號

姓名

一、單一選擇題：每題 6 分，共 12 分

(C) 1. 設 P，Q 為平面 $x+2y-3z=4$ 上相異兩點，若 $\overrightarrow{PQ}=(a,b,c)$，則 $a+2b-3c$ 的值為何？
(A) -8　(B) -4　(C) 0　(D) 4　(E) 8

【概念中心】平面的法向量

【解析】∵ 平面 $x+2y-3z=4$ 的法向量 $\overrightarrow{n}=(1,2,-3)$ 且 P，Q 在平面上

∴ $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}=a+2b-3c=0$

故選(C)。

(D) 2. 若兩平行平面 $2x-y+2z=6$，$4x-2y+4z=k$ 的距離為 1，則實數 k 的值可為
(A) -6　(B) -3　(C) 3　(D) 6　(E) 9

【概念中心】兩平行平面的距離

【解析】設 E_1：$2x-y+2z=6\Rightarrow 2x-y+2z-6=0$，

E_2：$4x-2y+4z=k\Rightarrow 2x-y+2z-\frac{k}{2}=0$，

依題意得 $d(E_1,E_2)=1$

$\Rightarrow\frac{\left|\frac{k}{2}-6\right|}{\sqrt{4+1+4}}=1\Rightarrow\left|\frac{k}{2}-6\right|=3\Rightarrow\frac{k}{2}-6=-3$ 或 3

∴ $k=6$ 或 18

故選(D)。

二、多重選擇題：每題 10 分，共 20 分

(B E) 3. 下列關於 xy 平面的敘述，哪些是正確的？
(A) 法向量為 $(1,1,0)$　(B) 法向量為 $(0,0,\pi)$　(C) 平面方程式為 $xy=0$
(D) 平面方程式為 $x+y=0$　(E) 平面方程式為 $z=0$

【概念中心】坐標平面的方程式

【解析】xy 平面的方程式為 $z=0$，

其法向量 $\overrightarrow{n}=(0,0,t)$，其中 t 是不為 0 的實數，

故選(B)(E)。

★(B D) 4. 設 a，b 為實數。若空間中某一平面過點 $(1,0,0)$，$(0,a,0)$，$(0,0,b)$ 與 $(1,2,3)$，則下列敘述哪些是正確的？
(A) a，b 有可能都是正數　(B) a，b 有可能是一個正數、一個負數
(C) a，b 有可能都是負數　(D) a，b 有可能同時為 0
(E) a，b 有可能只有一個數為 0

【概念中心】平面的截距式

【解析】(1) 若 a，b 均不為 0，則可設此平面方程式為 $\frac{x}{1}+\frac{y}{a}+\frac{z}{b}=1$，

$(1,2,3)$ 代入 $\frac{x}{1}+\frac{y}{a}+\frac{z}{b}=1$ 得 $1+\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1\Rightarrow\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=0\Rightarrow\frac{2}{a}=-\frac{3}{b}$，

因此，a，b 為一正數、一負數。

(2) 若 $a=0$，$b\neq0$，則平面過 $(1,0,0)$，$(0,0,0)$ 與 $(0,0,b)$，

此平面的方程式為 $y=0$，不包含點 $(1,2,3)$，與已知條件不合。

(3) 若 $b=0$，$a\neq0$，則平面過 $(1,0,0)$，$(0,a,0)$ 與 $(0,0,0)$，

此平面的方程式為 $z=0$，不包含點 $(1,2,3)$，與已知條件不合。

(4) 若 $a=b=0$，則平面過 $(1,0,0)$，$(0,0,0)$ 與 $(1,2,3)$ 成立。

由(1)，(2)，(3)，(4)可知，a，b 有可能為一正數、一負數，或者兩數同時為 0。

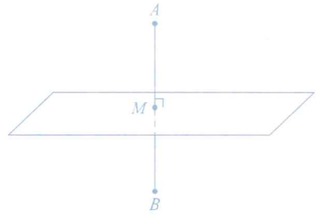
故選(B)(D)。

三、填充題：每格 8 分，共 48 分

1. 已知空間中兩點 $A(3,5,6)$，$B(5,-3,2)$，則 $\overline{AB}$ 的垂直平分面方程式為 $\underline{x-4y-2z+8=0}$。

【概念中心】垂直平分面方程式

【解析】$\overline{AB}$ 的中點 M 的坐標為 $\left(\frac{3+5}{2},\frac{5-3}{2},\frac{6+2}{2}\right)=(4,1,4)$，



$\overrightarrow{AB}=(2,-8,-4)=2\cdot(1,-4,-2)$，

取 $\overrightarrow{n}=(1,-4,-2)$ 為所求平面的法向量，

因此，所求平面方程式為 $1\cdot(x-4)-4\cdot(y-1)-2\cdot(z-4)=0$

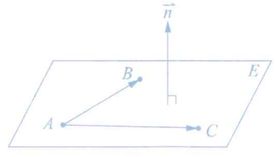
$\Rightarrow x-4y-2z+8=0$。

★ 2. 空間中過 $A(1,2,3)$，$B(5,7,-3)$，$C(1,1,-3)$ 三點的平面方程式為 $\underline{9x-6y+z=0}$。

【概念中心】不共線三點所決定的平面方程式

【解析】$\overrightarrow{AB}=(4,5,-6)$，$\overrightarrow{AC}=(0,-1,-6)$，

設所求平面為 E，其法向量為 $\overrightarrow{n}$，



則 $\overrightarrow{n}\,//\,(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=\left(\begin{vmatrix}5&-6\\-1&-6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-6&4\\-6&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4&5\\0&-1\end{vmatrix}\right)=(-36,24,-4)$，

取 $\overrightarrow{n}=(9,-6,1)$，又 E 過點 $A(1,2,3)$，

因此，所求平面方程式為 $9\cdot(x-1)-6\cdot(y-2)+1\cdot(z-3)=0$

$\Rightarrow 9x-6y+z=0$。