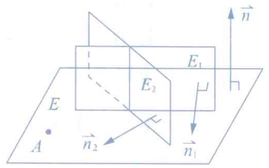
★3. 空間中，過點 $A(-1,2,1)$ 且與兩平面 $E_1：2x-y-z+110=0$，$E_2：x-2y+2z+2021=0$ 均垂直的平面方程式為 $\underline{4x+5y+3z-9=0}$ 。

【概念中心】由已知條件求平面方程式

【解析】E_1 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(2,-1,-1)$，$E_2$ 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(1,-2,2)$，



設所求平面為 E，其法向量為 $\vec{n}$ ，

則 $\vec{n}\,//\,(\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2})=\left(\begin{vmatrix}-1&-1\\-2&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&2\\2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&-1\\1&-2\end{vmatrix}\right)=(-4,-5,-3)$，

取 $\vec{n}=(4,5,3)$，又 E 過點 $A(-1,2,1)$

$\therefore$ E 的方程式為 $4\cdot(x+1)+5\cdot(y-2)+3\cdot(z-1)=0\Rightarrow 4x+5y+3z-9=0$。

4. 平面 $x-y+2z=3$ 與平面 $2x+y+z=4$ 所成的銳夾角為 $\underline{60}$ 度。

【概念中心】兩平面的夾角

【解析】設 $E_1：x-y+2z=3\Rightarrow$ 法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,-1,2)$，$E_2：2x+y+z=4\Rightarrow$ 法向量 $\overrightarrow{n_2}=(2,1,1)$，

E_1 與 E_2 所成的銳夾角為 θ，

則 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{|2-1+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\times\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $\theta=60°$

5. 已知平面 F 的方程式為 $2x-2y+z=1$，若平面 E 與平面 F 平行，且 $A(1,3,1)$，$B(-2,3,2)$ 兩點到平面 E 的距離相等，則平面 E 的方程式為 $\underline{4x-4y+2z+11=0}$ 。

【概念中心】平面的平行，點到平面的距離

【解析】依題意可設平面 E 的方程式為 $2x-2y+z+d=0$

$\because$ $d(A,E)=d(B,E)$

$\therefore$ $\dfrac{|2\cdot1-2\cdot3+1+d|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{|2\cdot(-2)-2\cdot3+2+d|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}$

$\Rightarrow|d-3|=|d-8|\Rightarrow d-3=d-8$ 或 $d-3=-(d-8)$

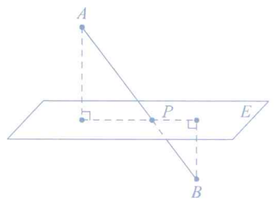
$\Rightarrow -3=-8$（不合）或 $d=\dfrac{11}{2}$

因此，所求平面 E 的方程式為 $2x-2y+z+\dfrac{11}{2}=0\Rightarrow 4x-4y+2z+11=0$。

★6. 空間中，已知 $A(1,2,-3)$，$B(-5,-1,0)$，平面 $E：x+y-2z+3=0$，若 $\overline{AB}$ 交平面 E 於 P 點，則 P 點的坐標為 $\underline{\left(-\dfrac{19}{5},-\dfrac{2}{5},-\dfrac{3}{5}\right)}$ 。

【概念中心】點到平面的距離

【解析】如右圖，



$\overline{AP}：\overline{BP}=d(A,E)：d(B,E)$

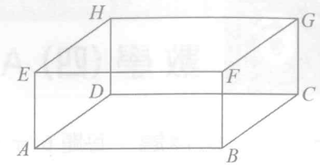
$=\dfrac{|1+2-2\cdot(-3)+3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}：\dfrac{|-5-1-2\cdot0+3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=4：1$，

由內分點公式得 P 點的坐標為

$\left(\dfrac{4\cdot(-5)+1\cdot1}{4+1},\dfrac{4\cdot(-1)+1\cdot2}{4+1},\dfrac{4\cdot0+1\cdot(-3)}{4+1}\right)=\left(-\dfrac{19}{5},-\dfrac{2}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$。

四、計算題：每題 10 分，共 20 分

★1. 如右圖，長方體 $ABCD-EFGH$ 中，$\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=4$，$\overline{AE}=2$。

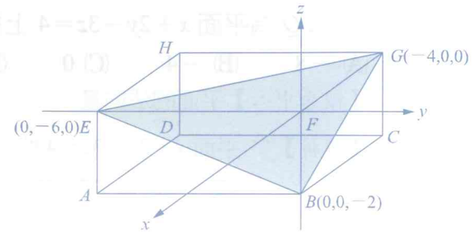


(1) 試求 D 點到平面 BEG 的距離。（5 分）

(2) 試求四面體 $DBEG$ 的體積。（5 分）

（已知四面體的體積 $=\dfrac{1}{3}\times$ 底面積 $\times$ 高）

【解】坐標化如右圖，



令 $F(0,0,0)$，$G(-4,0,0)$，

$E(0,-6,0)$，$B(0,0,-2)$，

則 $D(-4,-6,-2)$。

(1) 平面 BEG 的方程式為

$\dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{-6}+\dfrac{z}{-2}=1\Rightarrow 3x+2y+6z+12=0$，

所求 $d(D，平面\ BEG)=\dfrac{|3\cdot(-4)+2\cdot(-6)+6\cdot(-2)+12|}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}=\dfrac{24}{7}$ 。

(2) $\overrightarrow{BE}=(0,-6,2)$，$\overrightarrow{BG}=(-4,0,2)$

$\Rightarrow\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BG}=\left(\begin{vmatrix}-6&2\\0&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&0\\2&-4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&-6\\-4&0\end{vmatrix}\right)=(-12,-8,-24)$

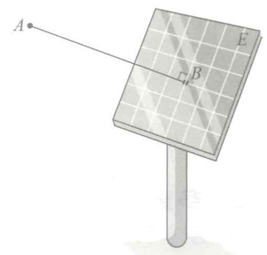
$\Rightarrow\triangle BEG$ 面積 $=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BG}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+(-8)^2+(-24)^2}=14$

$\therefore$ 四面體 $DBEG$ 的體積 $=\dfrac{1}{3}\times(\triangle BEG$ 面積$)\times d(D，平面\ BEG)$

$=\dfrac{1}{3}\times14\times\dfrac{24}{7}=16$

【概念中心】點到平面的距離、四面體體積

2. 為了提高接收效率，太陽能板在接收太陽光時，板面 E 一直保持和太陽光垂直。現為了方便研究，設定空間坐標系，並將地面設為 xy 平面，結果發現經過點 $A(2,2,4)$ 的太陽光射到太陽能板面 E 上的點 $B(1,2,3)$。



(1) 試求平面 E 的方程式。（5 分）

(2) 平面 E 與地面的銳夾角為何？（5 分）

【解】(1) $\because$ 板面 E 一直保持和太陽光垂直

$\therefore$ $\overrightarrow{BA}=(1,0,1)$ 為平面 E 的法向量

又點 $B(1,2,3)$ 在平面 E 上，

因此，所求平面 E 的方程式為

$1\cdot(x-1)+0\cdot(y-2)+1\cdot(z-3)=0\Rightarrow x+z-4=0$。

(2) 設平面 E 與地面的銳夾角為 θ

$\because$ 平面 E 的法向量 $\overrightarrow{BA}=(1,0,1)$，地面($xy$ 平面)的法向量 $\vec{n}=(0,0,1)$

$\therefore$ $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BA}||\vec{n}|}=\dfrac{|0+0+1|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\times\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ $\theta=45°$

【概念中心】平面方程式、兩平面的夾角

素養題