三、填充題：每格 8 分，共 48 分

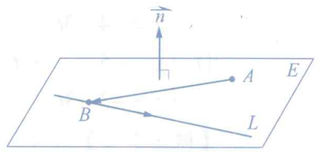
1. 空間中，過點 $A(-1,1,1)$ 且包含直線 L：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ 的平面方程式為 $\underline{5x-2y-4z+11=0}$ 。

【概念中心】一直線與線外一點所決定的平面

【解析】L 過點 $B(1,4,2)$，方向向量 $\overrightarrow{v}=(2,1,2)$，$\overrightarrow{AB}=(2,3,1)$，

設所求平面為 E，其法向量為 $\overrightarrow{n}$，則 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{n}\,//\,(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{AB})=\left(\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&2\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&1\\2&3\end{vmatrix}\right)=(-5,2,4)$



取 $\overrightarrow{n}=(5,-2,-4)$，又 E 過點 $A(-1,1,1)$，

因此，所求平面 E 的方程式為

$5\cdot(x+1)-2\cdot(y-1)-4\cdot(z-1)=0\Rightarrow 5x-2y-4z+11=0$。

2. 已知 L_1：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{1}$ 與 L_2：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{2}$ 為空間中相交於一點的二直線。則：

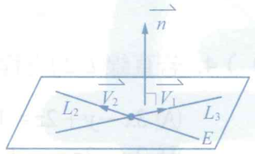
(1) L_1 和 L_2 的交點坐標為 $\underline{(5,3,1)}$ 。

(2) 包含 L_1 與 L_2 的平面方程式為 $\underline{7x-2y-6z-23=0}$ 。

【概念中心】兩直線的交點、兩相交直線所決定的平面

【解析】(1) L_1 的參數式為 $\begin{cases}x=3+2s\\y=-1+4s\\z=s\end{cases}$，$s\in\mathbb{R}$，$L_2$ 的參數式為 $\begin{cases}x=1+2t\\y=1+t\\z=-3+2t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$，

解方程式 $\begin{cases}3+2s=1+2t\cdots①\\-1+4s=1+t\cdots②\\s=-3+2t\cdots③\end{cases}$，由①，②可得 $\begin{cases}s=1\\t=2\end{cases}$，



代入③得 $1=-3+2\cdot 2$ 亦成立

$\therefore$ L_1 和 L_2 的交點坐標為 $(3+2\cdot 1,-1+4\cdot 1,1)=(5,3,1)$

(2) L_1 的方向向量 $\overrightarrow{v_1}=(2,4,1)$，$L_2$ 的方向向量 $\overrightarrow{v_2}=(2,1,2)$，

設所求平面為 E，其法向量為 $\overrightarrow{n}$，則 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v_1}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v_2}$

$\therefore \overrightarrow{n}\,//\,(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})=\left(\begin{vmatrix}4&1\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&4\\2&1\end{vmatrix}\right)=(7,-2,-6)$

取 $\overrightarrow{n}=(7,-2,-6)$，又 E 過點 $(5,3,1)$，

因此，所求平面 E 的方程式為 $7\cdot(x-5)-2\cdot(y-3)-6\cdot(z-1)=0\Rightarrow 7x-2y-6z-23=0$。

★3. 已知空間中兩直線 L_1：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$ 與 L_2：$\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-3}{4}$。則：

(1) 包含 L_1 與 L_2 的平面方程式為 $\underline{2x-2y-z+1=0}$ 。

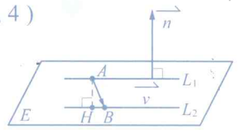
(2) L_1 與 L_2 的距離為 $\underline{3}$ 。

【概念中心】兩平行直線所決定的平面、兩平行線的距離

【解析】(1) L_1 過點 $A(1,2,-1)$，L_2 過點 $B(2,1,3)$，L_1 與 L_2 的方向向量均為 $\overrightarrow{v}=(1,2,-2)$，

設所求平面為 E，其法向量為 $\overrightarrow{n}$，則 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AB}=(1,-1,4)$

$\therefore \overrightarrow{n}\,//\,(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{AB})=\left(\begin{vmatrix}2&-2\\-1&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&1\\4&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}\right)=(6,-6,-3)$



取 $\overrightarrow{n}=(2,-2,-1)$，又 E 過點 $A(1,2,-1)$

因此，所求平面 E 的方程式為 $2\cdot(x-1)-2\cdot(y-2)-1\cdot(z+1)=0\Rightarrow 2x-2y-z+1=0$。

(2) 設 A 點在直線 L_2 上的垂足為 $H(2+t,1+2t,3-2t)$，

則 $\overrightarrow{AH}=(1+t,-1+2t,4-2t)\perp L_2\Rightarrow(1+t,-1+2t,4-2t)\cdot(1,2,-2)=0\Rightarrow t=1$

$\therefore \overrightarrow{AH}=(1+1,-1+2\cdot 1,4-2\cdot 1)=(2,1,2)$

所求 $=|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$。

4. 空間中，點 $P(-3,2,1)$ 在平面 E：$3x-y+2z-5=0$ 上的投影點坐標為 $\underline{(0,1,3)}$ 。

【概念中心】平面上的投影點

【解析】$\because$ 平面 E 的法向量 $\overrightarrow{n}=(3,-1,2)$

$\therefore$ 可設 P 在 E 上的投影點為 $Q(-3+3t,2-t,1+2t)$

$\because$ Q 在 E 上

$\therefore 3\cdot(-3+3t)-(2-t)+2\cdot(1+2t)-5=0\Rightarrow t=1$

因此，所求投影點 Q 的坐標為 $(-3+3,2-1,1+2)=(0,1,3)$。

四、計算題：每題 10 分，共 20 分

★1. 空間中，已知 L：$\begin{cases}x=0\\2y-z+1=0\end{cases}$ 與 x 軸為兩歪斜線。設平面 E 包含 x 軸而與 L 平行，試求：

(1) 平面 E 的方程式。 (6 分)

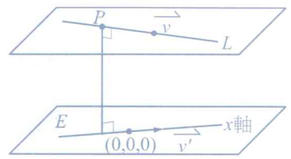
(2) 直線 L 與 x 軸的距離。 (4 分)

【解】(1) 直線 L 的參數式為 $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=1+2t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$，其方向向量 $\overrightarrow{v}=(0,1,2)$，

x 軸過點 $(0,0,0)$，其方向向量 $\overrightarrow{v'}=(1,0,0)$，

設 E 的法向量為 $\overrightarrow{n}$，則 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v}$ 且 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v'}$

$\therefore \overrightarrow{n}\,//\,(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{v'})=\left(\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\right)=(0,2,-1)$



取 $\overrightarrow{n}=(0,2,-1)$，又 E 過點 $(0,0,0)$，

因此，所求平面 E 的方程式為 $0\cdot(x-0)+2\cdot(y-0)-1\cdot(z-0)=0\Rightarrow 2y-z=0$。

(2) 直線 L 過點 $P(0,0,1)$，

所求 $d(L,x\text{ 軸})=d(L,E)=d(P,E)=\dfrac{|2\cdot 0-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 。

【概念中心】兩歪斜線的距離

2. 跨年晚會活動需要投射兩道雷射燈光在舞台上某處交會，現為了計算方便，設定空間坐標系，已知其中一道雷射燈光由點 $(0,0,0)$ 朝向點 $(3,2,4)$ 發射，另一道燈光則由點 $(0,k,10)$ 沿著平行於 x 軸的方向發射，試問： 素養題

(1) 當 k 的值是多少時，兩道雷射燈光會相交？ (7 分)

(2) 承第(1)題，兩道雷射光的交會點坐標為何？ (3 分)

【解】(1) 設 $O(0,0,0)$，$A(3,2,4)$，$B(0,k,10)$，

雷射燈光 OA 為直線 L_1，另一道燈光為直線 L_2，

則 L_1 的參數式為 $\begin{cases}x=3s\\y=2s\\z=4s\end{cases}$，$s\in\mathbb{R}$，$L_2$ 的參數式為 $\begin{cases}x=t\\y=k\\z=10\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$，

令 $\begin{cases}3s=t\\2s=k\\4s=10\end{cases}$，則 $\begin{cases}s=\dfrac{5}{2}\\t=\dfrac{15}{2}\\k=5\end{cases}$，

因此，當 $k=5$ 時，兩道雷射燈光會相交。

(2) 兩道雷射光的交點坐標為 $\left(3\cdot\dfrac{5}{2},2\cdot\dfrac{5}{2},4\cdot\dfrac{5}{2}\right)=\left(\dfrac{15}{2},5,10\right)$。

【概念中心】兩直線的關係