

高二數學平時考 第四冊 CH4-1~Ch4-2 考卷第 1 頁

一、是非題(每題 2 分，共 16 分)

若 A, B, C 都是 2 階非零方陣，判斷下列對錯：(對的寫 O，錯的寫 X)

- () 1. $A+I=A$ () 2. $A(B+C)=AB+AC$
 () 3. $(AB)^2=A^2B^2$ () 4. 若 $A \neq O$ 且 $AB=AC$ ，則 $B=C$
 () 5. $\det(2A)=2\det(A)$ () 6. 若 $A^2=O$ ，則 $A=O$
 () 7. 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ () 8. $2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

二、選擇題 (6 題，每題 6 分，共 36 分) 6-4-2-0

- () 1. 若聯立方程式 $\begin{cases} x-y+2z=1-a \\ x+3y-3z=1+a \\ 3x+y+z=a \end{cases}$ 有解，求 a 之值為何？【單選】
 (1) 1 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 2 (4) $\frac{5}{2}$ (5) 3。
- () 2. 設矩陣 $\begin{bmatrix} a & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & b & 7 \\ 3 & -5 & 4 & c \end{bmatrix}$ 經過矩陣列運算得 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -11 & 1 & -21 \end{bmatrix}$ ，則 $a+b+c=?$ 【單選】
 (1) 6 (2) 5 (3) 4 (4) 3 (5) 2
- () 3. 三平面 $x+2y-3z=1$ ， $x+3y-2z=-1$ 及 $x+by+cz=1$ (b, c 為實數)，則下列哪些敘述正確？【多選】
 (1) 當 $b=1, c=1$ 時，三平面沒有共同交點 (2) 當 $b=-2, c=1$ 時，三平面恰交於一點
 (3) 當 $b=4, c=-1$ 時，三平面恰交於一點 (4) 當 $b=2, c=-3$ 時，三平面恰交於一直線
 (5) 當 $b=1, c=-4$ 時，三平面恰交於一直線
- () 4. 設 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$ ， $p = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$ ，其中 a, b 為實數，若 $p^{-1}Ap = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則下列哪些正確？【多選】
 (1) $a = \frac{5}{2}$ (2) $b = -\frac{3}{4}$ (3) $c = 9b$ (4) $p^{-1}A^5p = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $A^5 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2050 & -1023 \\ -4092 & 2050 \end{bmatrix}$ 。
- () 5. 若 $X = [x_{ij}]_{2 \times 2}$ ， $Y = [y_{ij}]_{2 \times 2}$ ，且滿足 $X+2Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ， $Y-3X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，則下列何者為真？【多選】
 (1) $x_{11} < y_{11}$ (2) $x_{22} < y_{22}$ (3) $x_{21} + y_{21} = \frac{11}{7}$ (4) $y_{11} + y_{22} = 0$ (5) $3Y - 2X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ 。
- () 6. 設 A 是二階方陣，若 $A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ，且 $A^6 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ，則下列選項哪些正確？【多選】
 (1) $A^2 = -I_2$ (2) $a = 3$ (3) $a = -3$ (4) $b = 4$ (5) $b = -4$ 。

三、填充題 (6 格，每格 6 分，共 36 分)

- 1、小南每天早上幫全家人買早餐，前天買 3 個蛋餅、4 個包子及 1 個饅頭；昨天買 2 個蛋餅、2 個包子及 4 個饅頭；今天買 1 個蛋餅、4 個包子及 4 個饅頭；發現這三天早餐都是 85 元。那麼他明天想買 3 個蛋餅、2 個包子及 3 個饅頭需要 (1) 元。
- 2、設聯立方程式 $\begin{bmatrix} a & 3 \\ 1 & a-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 無解，求 $a =$ (2)。
- 3、設 $M = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ ，且滿足 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，求數對 $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}) =$ (3)。(數對要有括號，數字間以半形逗點區隔)

高二數學平時考 第四冊 CH3-1~Ch3-2 考卷第 2 頁

4、求下列兩個聯立方程式的解：

$$(1) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z} = 5 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = -4 \end{cases}, \text{ 則數對}(x, y, z) = \underline{(4)}。(\text{數對有括號, 2 數字間以半形逗點區隔})$$

$$(2) \begin{cases} x(x+y+z) = 12 - yz \\ y(x+y+z) = 15 - zx \\ z(x+y+z) = 20 - xy \end{cases}, \text{ 則數對}(x, y, z) = \underline{(5)}。(\text{有 2 解, 數對有括號, 2 數字間以半形逗點區隔})$$

5、若聯立方程式 $\begin{cases} 2x + y + z = a \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x + y + bz = 2 \end{cases}$ 有無窮多組解，則數對 $(a, b) = \underline{(6)}$ 。
(數對要有括號，數字間以半形逗點區隔)

四、計算題 (請於答案卷上作答，請寫出計算過程，9 分)

某大學數學系的微積分課程總成績計算方式如下：

(一)期中考考 2 次，分別占總成績的 25%。(二)期末考占總成績的 30%。(三)平時成績占總成績的 20%。

當期末要結算成績時，助教要計算多位學生的總成績，於是他想利用矩陣的乘法來計算，首先他先將學生每個項目的成績列出，列出方式如下：

姓名	期中考(I)	期中考(II)	期末考	平時成績
甲	70	75	75	90
乙	60	70	70	85
丙	100	90	95	95
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

再轉換成矩陣的型式呈現： $\begin{bmatrix} 70 & 75 & 75 & 90 \\ 60 & 70 & 70 & 85 \\ 100 & 90 & 95 & 95 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ ，試問：

- (1)若要計算總成績，需將上面的矩陣乘上哪一個矩陣後，才能呈現每位同學的總成績？請寫出該矩陣。(3 分)
- (2)若小南前兩次期中考分別考了 10 分與 25 分，小華考了 30 分及 50 分，利用矩陣乘法計算後，討論兩人總成績是否能及格，若要及格，則期末考至少要考幾分？(四捨五入至整數位)(6 分)

五、計算題 (請於答案卷上作答，請寫出計算過程，10 分)

情報員通常會用密碼來交換情報資訊。首先會利用矩陣進行編碼，例如： a 表示 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ； b 表示 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ； c 表示 $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ ； \dots ； z 表示 $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ 。又例如單字「yes」則用矩陣 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ 表示， \dots ，依此類推。某情報員甲、乙要約定一個地點交換情報，為了保密，他們將某英文字用矩陣 X 表示，透過矩陣 AX 加密後再傳出，其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 。設今天情報員甲傳一個矩陣 $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 12 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$ 給乙，則他們兩人是約在哪裡交換情報？(請寫出你算出的英文單字)

六、計算題 (請於答案卷上作答，請寫出計算過程，10 分)

設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ，回答下列兩個小題：

- (1)請計算 $A^2 - 7A$ 的值。(數對要有括號，數字間以半形逗點區隔)
- (2)若 $A^4 - 8A^3 + 11A^2 - 15A = mA + nI_2$ ，則數對 $(m, n) = ?$

高二數學平時考 第四冊 CH4-1~Ch4-2 答案卷 第 1 頁

二年 _____ 班 _____ 號 姓名 _____

一、是非題(每題 2 分，共 16 分)

1.		2.		3.		4.		5.		6.		7.		8.	
----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--

二、選擇題 (6 題，每題 6 分，共 36 分) 6-4-2-0

1.		2.		3.	
4.		5.		6.	

三、填充題 (6 格，每格 6 分，共 36 分)

(1)		(2)		(3)	
(4)		(5)			
(6)					

四、計算題 (請於答案卷上作答，請寫出計算過程，9 分)

某大學數學系的微積分課程總成績計算方式如下：

(一)期中考考 2 次，分別占總成績的 25%。(二)期末考占總成績的 30%。(三)平時成績占總成績的 20%。

當期末要結算成績時，助教要計算多位學生的總成績，於是他想利用矩陣的乘法來計算，首先他先將學生每個項目的成績列出，列出方式如下：

姓名	期中考(I)	期中考(II)	期末考	平時成績
甲	70	75	75	90
乙	60	70	70	85
丙	100	90	95	95
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

再轉換成矩陣的型式呈現：
$$\begin{bmatrix} 70 & 75 & 75 & 90 \\ 60 & 70 & 70 & 85 \\ 100 & 90 & 95 & 95 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$
，試問：

- 若要計算總成績，需將上面的矩陣乘上哪一個矩陣後，才能呈現每位同學的總成績？請寫出該矩陣。(3 分)
- 若小南前兩次期中考分別考了 10 分與 25 分，小華考了 30 分及 50 分，利用矩陣乘法計算後，討論兩人總成績是否能及格，若要及格，則期末考至少要考幾分？(四捨五入至整數位)(6 分)

高二數學平時考 第四冊 CH4-1~Ch4-2 答案卷 第 2 頁

五、計算題（請於答案卷上作答，請寫出計算過程，10 分）

情報員通常會用密碼來交換情報資訊。首先會利用矩陣進行編碼，例如： a 表示 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ； b 表示 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ； c 表示 $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ ； \dots ； z 表示 $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ 。又例如單字「yes」則用矩陣 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ 表示， \dots ，依此類推。某情報員甲、乙要約定一個地點交換情報，為了保密，他們將某英文字用矩陣 X 表示，透過矩陣 AX 加密後再傳出，其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 。設今天情報員甲傳一個矩陣 $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 12 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$ 給乙，則他們兩人是約在哪裡交換情報？（請寫出你算出的英文單字）

六、計算題（請於答案卷上作答，請寫出計算過程，12 分）

設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ，回答下列兩個小題：

- (1) 請計算 $A^2 - 7A$ 的值。
- (2) 若 $A^4 - 8A^3 + 11A^2 - 15A = mA + nI_2$ ，則數對 $(m, n) = ?$