

高二數學平時考 第四冊 CH4-1~Ch4-2 答案卷

二年 _____ 班 _____ 號 姓名 _____

一、是非題(每題 2 分，共 16 分)

1.	X	2.	O	3.	X	4.	X	5.	X	6.	X	7.	O	8.	X
----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---

二、選擇題 (6 題，每題 6 分，共 36 分) 6-4-2-0

1.	2	2.	4	3.	24
4.	125	5.	1345	6.	135

三、填充題 (6 格，每格 6 分，共 36 分)

(1)	90	(2)	-1	(3)	(2, -1, 0, 0, 3, 1)
(4)	$\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{3}\right)$	(5)	$(1, 2, 3)$ 或 $(-1, -2, -3)$		
(6)	$\left(\frac{9}{7}, \frac{8}{5}\right)$				

四、計算題 (請於答案卷上作答，請寫出計算過程，9 分)

某大學數學系的微積分課程總成績計算方式如下：

(一)期中考考 2 次，分別占總成績的 25%。(二)期末考占總成績的 30%。(三)平時成績占總成績的 20%。

當期末要結算成績時，助教要計算多位學生的總成績，於是他想利用矩陣的乘法來計算，首先他先將學生每個項目的成績列出，列出方式如下：

姓名	期中考(I)	期中考(II)	期末考	平時成績
甲	70	75	75	90
乙	60	70	70	85
丙	100	90	95	95
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

再轉換成矩陣的型式呈現：
$$\begin{bmatrix} 70 & 75 & 75 & 90 \\ 60 & 70 & 70 & 85 \\ 100 & 90 & 95 & 95 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$
，試問：

- 若要計算總成績，需將上面的矩陣乘上哪一個矩陣後，才能呈現每位同學的總成績？請寫出該矩陣。(3 分)
- 若小南前兩次期中考分別考了 10 分與 25 分，小華考了 30 分及 50 分，利用矩陣乘法計算後，討論兩人總成績是否能及格，若要及格，則期末考至少要考幾分？(四捨五入至整數位)(6 分)

$$\text{Ans: (1)} \begin{bmatrix} 25\% \\ 25\% \\ 39\% \\ 20\% \end{bmatrix};$$

(2) 小南不會及格，小華期末考至少要考 67 分才會及格。

五、計算題（請於答案卷上作答，請寫出計算過程，10 分）

情報員通常會用密碼來交換情報資訊。首先會利用矩陣進行編碼，例如： a 表示 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ； b 表示 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ； c 表示 $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ ； \dots ； z 表示 $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ 。又例如單字「yes」則用矩陣 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ 表示， \dots ，依此類推。某情報員甲、乙要約定一個地點交換情報，為了保密，他們將某英文字用矩陣 X 表示，透過矩陣 AX 加密後再傳出，其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 。設今天情報員甲傳一個矩陣 $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 12 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$ 給乙，則他們兩人是約在哪裡交換情報？（請寫出你算出的英文單字）

Ans: bus

$$\because \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 12 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}, \text{ 又 } \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 12 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

六、計算題（請於答案卷上作答，請寫出計算過程，12 分）

設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ，回答下列兩個小題：

(1) 請計算 $A^2 - 7A$ 的值。

(2) 若 $A^4 - 8A^3 + 11A^2 - 15A = mA + nI_2$ ，則數對 $(m, n) = ?$

$$\text{Ans: (1)} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \text{ (2)} (m, n) = (1, -4)$$

$$\begin{aligned} (1) A^2 - 7A &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^2 - 7 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 14 \\ 35 & 26 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 21 & 14 \\ 35 & 28 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$(2) \because A^2 - 7A + 2I = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{又 } A^4 - 8A^3 + 11A^2 - 15A &= (A^2 - 7A + 2I)(A^2 - A + 2I) + A - 4I \\ &= A - 4I \end{aligned}$$

$$\because A^2 - 7A = -2I \Rightarrow A^4 - 7A^3 = -2A^2; A^3 - 7A^2 = -2A$$

$$\begin{aligned} \text{故 } A^4 - 8A^3 + 11A^2 - 15A &= -A^3 + 9A^2 - 15A = -(A^3 - 7A^2) + 2A^2 - 15A \\ &= 2A^2 - 13A = 2(A^2 - 7A) + A = A - 4I \end{aligned}$$