

大學入學考試中心

指定科目考試  
數學考科考試說明

中華民國九十六年九月

版權所有

# 指定科目考試數學考科考試說明

## 目 錄

---

---

壹 測驗目標.....	1
貳 測驗內容.....	2
參 試題舉例.....	3
附錄 .....	8

## 指定科目考試

### 數學考科考試說明

「指定科目數學考科」和「學科能力測驗數學考科」在測驗目標和難度上有所不同。「學科能力測驗數學考科」主要是測驗高中階段學生的基本概念，以及使用這些概念直接解題的能力，所以試題所需計算大都不會太複雜、解題步驟較少，題型為電腦可讀的選擇或選填題。而「指定科目數學考科」則進一步評量考生的解題過程、表達能力，因此增加了非選擇題型。試題中所用到的數學名詞或概念，如非各版本通用者，都將在試卷中加以說明。

#### 壹、測驗目標

指定科目數學考科的測驗目標，包含學科能力測驗數學考科的測驗目標：概念性知識、程序性知識，及解決問題的能力。另外，也著重解決問題中閱讀、表達、連結以及推理與論證的能力。

##### 一、概念性知識：

例如：能辨認某概念；能確認概念中的基本數學原理。

##### 二、程序性知識：

例如：能讀圖、查表、或運用適當的公式與步驟解題。

##### 三、閱讀與表達能力：

例如：能讀懂題目，並以數學語言表達題目的涵意及解題的過程。

##### 四、連結能力：

例如：能融會貫通數學中不同領域的概念，或連結數學以外其他學科知識或生活經驗。

##### 五、推理論證的能力：

例如：能應用數學模型與邏輯思考進行正確的推理或證明。

##### 六、解決問題的能力：

例如：能應用數學知識、選擇有效策略及推理能力解決問題，並能檢驗結果的合理性與正確性。

## 貳、測驗內容

民國九十五年正式實施的「普通高級中學課程暫行綱要」(民國九十三年八月三十一日發布、民國九十四年一月二十日修正發布，以下簡稱「九五課綱」)，包括高一、高二的必修課程，及高三的選修課程數學(I)、數學(II)；為因應九五課綱，九十八年的指定科目數學考科仍分為數學甲、數學乙，且這兩個考科的測驗內容有所不同。由於學科能力測驗已評量學生高一、高二課程中的基本數學能力，因此，指定科目考試所測驗的能力應以進階的閱讀、表達、推理以及連結能力為主。另外，為協助大學校系選才，在考科測驗內容上，須考量校系在選才時所需之數學知識，並針對這些知識進行較具深度的評量，其中數學乙的試題計算量偏少，整合性試題在比例上也較少，數學甲較多整合數個概念的問題，計算量也較多。由本中心所發問卷結果顯示：選擇數學甲為考科的校系主要希望學生具備函數、方程式、機率、微積分、矩陣、幾何等數學知識；選擇數學乙為考科的校系則希望學生具備函數、方程式、機率、統計、排列組合等數學知識。因此，數學甲與數學乙的內容將做適當的區隔，其測驗內容如下：

考科	測驗內容
數學甲	高一數學的指數與對數、三角函數； 高二數學的向量、空間中的直線與平面、圓與球面的方程式； 選修科目數學 (I)： 機率與統計的部分內容：含獨立事件、條件機率、貝氏定理、數学期望值與二項分配(“以不牽涉信賴區間與信心水準的解讀為原則”)等、 矩陣、不等式； 選修科目數學 (II)： 多項式函數的極限與導數、導函數的應用、多項式函數的積分。
數學乙	高一數學的多項式函數、指數與對數； 高二數學的排列組合、機率與統計(I)； 選修科目數學 (I)： 機率與統計(II)、矩陣、不等式。

指定科目數學考科在評量上述測驗內容時，自然包含修習這些內容所需之先備知識和基本工具(可詳見附錄)。

## 參、試題舉例

以下是指定科目數學考科的一些試題示例，主要是呈現上述各項測驗目標。由於指定科目數學考科以評量較高層次的數學能力為主，各試題往往涉及數個測驗目標，亦將在各題中逐一說明。

各示例也呈現可能的新題型。指定科目數學考科的題型以計算、論證為主，可能是閱讀、偵錯、計算作圖、證明等。試題可能以啟發性方式命題，將較深或較難的問題分成數小題，一方面可降低部分試題的難度，一方面也提供需要的資料或部分作答線索。因此除測驗學科知識、解題能力外，並同時評量閱讀數學資料的能力。

下列各示例的題型與測驗目標，對數學甲、數學乙兩個考科均適用。本說明部分例題未附解答，主要考量到這些例題應有作答過程，並且可能有多種不同的做法。本中心在九十七年公佈參考試卷時，會將數學甲、數學乙的參考試題、答案集為一冊，提供較完整之參考資料。

### 例 1、概念性知識

設方程式  $x^5 = 1$  的五個根為  $1, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ ，則  $(3 - \omega_1)(3 - \omega_2)(3 - \omega_3)(3 - \omega_4) =$

- (1) 81                      (2) 162                      (3) 121                      (4) 242

出處：93 年數學甲選擇題第 1 題

說明：此題評量考生概念性知識，能否運用方程式根與因式的概念來求解。

### 例 2、程序性知識

#### <數學甲>

若有  $\theta$  使下述方程組不只有一組解，求  $\sin \theta + \cos \theta$  的值。(12 分)

$$\begin{cases} (1 + \cos \theta)x - y = 0 \\ -x + (1 + \sin \theta)y = 0 \end{cases}$$

出處：93 年數學甲非選擇題第一題

說明：此題主要的測驗目標為測驗學生程序性知識，所運用的數學知識為解聯立方程組、三角函數等概念。其中包含方程組解與行列式的連結，學生能否由方程組不只有一組解的假設，推得  $x, y$  的係數行列式等於零，進而列出  $(1 + \cos \theta)(1 + \sin \theta) - 1 = 0$  關係式；接著，解三角方程式，可利用變數變換寫出相關的一元二次方程式；最後，能從所得的解中，排除不可能的答案。以上這三個部分均分別給分。

**<數學乙>**

已知  $a_0, a_1, a_2 \cdots$  和  $b_0, b_1, b_2 \cdots$  為兩數列，彼此有如下的關係：

$$a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

(1) 求二階方陣  $A$  滿足  $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$  (其中  $n = 0, 1, 2, \cdots$ )。(2 分)

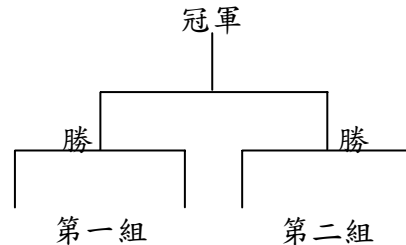
(2) 求  $A^2$ 、 $A^3$  並推出  $A^k$  之值，其中  $k$  為任意正整數。(6 分)

出處：本中心研究用試卷

說明：此題以階段性的方式引導考生是否能推出  $A^k$  的一般型式。問題(1)的主要測驗目標為閱讀與表達，評量考生能否連結某概念不同的表現形式，將遞迴式以矩陣的形式表示；問題(2)的主要測驗目標為程序性知識，評量考生是否會利用矩陣的乘法推出  $A^k$  之值，考生只要能正確表示  $A^k$  就可以得分。

**例 3、閱讀與表達能力**

某棒球比賽有實力完全相當的甲乙丙丁四隊參加，先將四隊隨機抽籤分成兩組比賽，兩組的勝隊再參加冠亞軍決賽。如下圖：



根據過去的紀錄，所有隊伍比賽時各隊獲勝的機率均為 0.5。則冠亞軍決賽由甲、乙兩隊對戰的機率為 0.8 9 10 (四捨五入到小數三位)。

出處：96 年數學乙選填題第 A 題

說明：此題主要評量考生閱讀與表達能力，所運用的數學觀念並不難，由題意「比賽時各隊獲勝的機率均為 0.5」，可知各隊實力相當，因此哪兩隊晉級的機率相當於以抽籤方式決定哪兩隊打決賽的機率。

**例 4、連結能力**

在坐標平面上，設  $P$  為  $y = 2 + x - x^2$  圖形上的一點。若  $P$  的  $x$  坐標為  $\log_3 10$ ，則  $P$  點的位置在

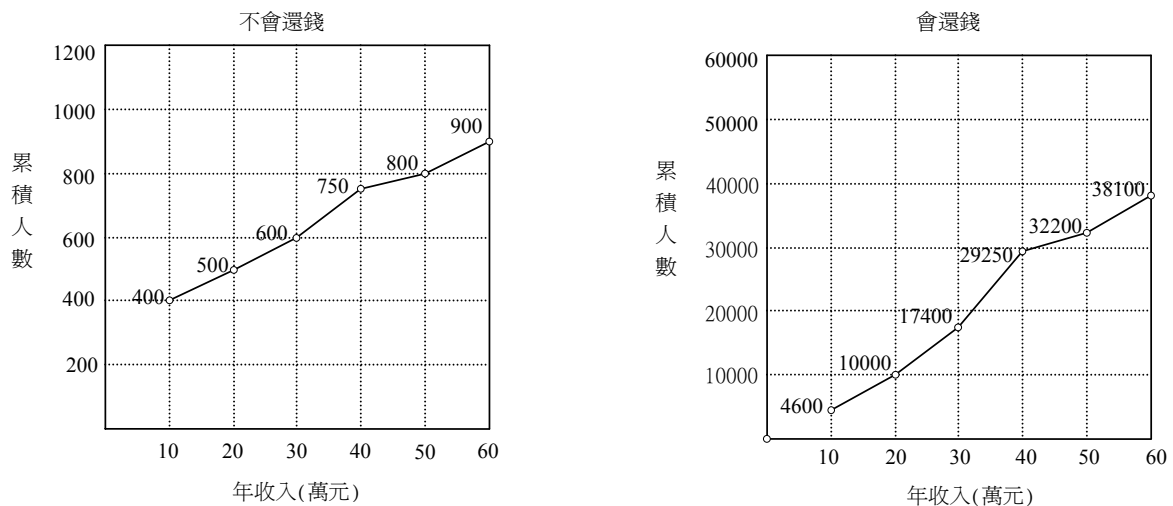
- (1) 第一象限
- (2) 第二象限
- (3) 第三象限
- (4) 第四象限
- (5) 坐標軸上

出處：95 年數學甲選擇題第 2 題

說明：此題的主要測驗目標是數學概念的連結，評量考生能否連結二次函數與對數的概念，來估計  $P$  點的位置。

**例 5、解決問題的能力**

某銀行檢討『一年期 20 萬元的小額急用貸款，一年後還款 21 萬元』的申請資格。過去幾年的記錄顯示：申辦此項貸款者一年後只有依約還款 21 萬元與違約不理(1 元都不還)兩種情形，沒有還一部分錢等其他情形發生；且發現會還錢或不會還錢者與其年收入有關，兩者的累積次數分配部分圖形如下：



- (1) 一個年收入 30 萬元以下的貸款者，會還錢的機率為何？
- (2) 銀行貸款給一個年收入 30 萬元以下的客戶，銀行的獲利期望值為多少元？

出處：94 年數學乙非選擇題第一題

說明：此題評量考生解決問題的能力，主要觀念為數学期望值，學生需先讀懂題意，從題目中的圖表求出還錢的機率，再利用數学期望值的概念來解題。

**例 6、推理論證的能力**

SARS 疫情期間，爲了建立指標顯示疫情已受控制，以便向國人宣示可以過正常生活，有位公共衛生專家建議的指標是『連續 7 天，每天新增的可能病例都不超過(小於或等於)5 人』。根據連續 7 天的新增病例計算，下列各選項，哪些必定符合此指標？

- (1) 平均數 $\leq 3$
- (2) 標準差 $\leq 1$
- (3) 平均數 $\leq 3$  且標準差 $\leq 2$
- (4) 平均數 $\leq 3$  且全距 $\leq 2$
- (5) 眾數=1 且全距 $\leq 4$

出處：92 年數學乙選擇題第 8 題

說明：此題評量考生推理論證能力，測驗學生是否清楚統計名詞的意義，並能從題目中的已知數據嘗試舉例，以推理及檢驗各選項是否合理與正確。

**例 7、解決問題與推理論證能力****<數學乙>**

在一個牽涉到兩個未知量  $x, y$  的線性規劃問題中，有三個限制條件。坐標平面上符合這三個限制條件的可行解區域是一個三角形區域  $ABC$ 。已知目標函數  $f(x, y) = ax + by$  ( $a, b$  是常數)，在此三角形的一個頂點  $A(12, 3)$  上取得最大值 42，而在另一個頂點  $B(6, 1)$  取得最小值 20。現因實務需要，加入第四個限制條件，結果可行解區域變成一個四邊形區域  $BCDE$ ，其中  $D$ 、 $E$  之坐標分別爲  $(10, 4)$  和  $(9, 2)$ 。

- (1) 試求  $a, b$  的值。(4 分)
- (2)  $A, D, C$  三點是否在同一條直線上?請說明理由。
- (3) 在四個限制條件下，求  $f(x, y) = ax + by$  的最大值與最小值。(4 分)

出處：本中心研究用試卷

說明：此題以題組的引導方式來佈題，其中問題(1)的主要測驗目標是概念性知識，欲瞭解學生能否利用線性規劃概念求得目標函數  $a, b$  的值；問題(2)的主要測驗目標是運用推理能力，學生需經由坐標作圖及計算後得知由於  $E$  點在  $\overline{AB}$  上，且加入第四個限制條件後，可行解區域會變成一個四邊形區域  $BCDE$ ，因此  $D$  點會落在  $\overline{AC}$  上。問題(3)的主要測驗目標是閱讀與表達，希望學生利用平行線法或頂點法等概念推導出  $f(x, y) = ax + by$  的最大與最小值。



**<數學甲>**

在一個牽涉到兩個未知量  $x, y$  的線性規劃問題中，有三個限制條件。坐標平面上符合這三個限制條件的可行解區域是一個三角形區域  $ABC$ 。已知目標函數  $f(x, y) = ax + by$  ( $a, b$  是常數)，在此三角形的一個頂點  $A(12, 3)$  上取得最大值 42，而在另一個頂點  $B(6, 1)$  取得最小值 20。現因實務需要，加入第四個限制條件，結果可行解區域變成一個四邊形區域  $BCDE$ ，其中  $D$ 、 $E$  之坐標分別為  $(10, 4)$  和  $(9, 2)$ 。

- (1) 試求  $a, b$  的值。(4 分)
- (2) 在四個限制條件下，求  $f(x, y) = ax + by$  的最大值與最小值。(4 分)
- (3) 設三角形  $ABC$  的頂點  $C$  坐標為  $(s, t)$ ，試說明  $s + 2t = 18$  且  $1 \leq s < 10$ 。(5 分)

出處：本中心研究用試卷

說明：此題是以題組的引導方式來佈題，其中問題(1)的主要測驗目標是概念性知識，欲瞭解學生能否由試題敘述求得目標函數  $a, b$  的值；問題(2)的主要測驗目標是閱讀與表達，瞭解學生能否讀懂「加入第四個限制條件，結果可行解區域變成一個四邊形區域  $BCDE$ 」，並利用圖形、線性規畫概念來推導出  $f(x, y) = ax + by$  的最大與最小值；本題與上一題最大的不同點在問題(3)，問題(3)主要測驗目標為測驗推理論證的能力，評量考生能否利用目標函數  $f(x, y) = ax + by$  在頂點  $C$  之值必介於最小、最大值之間，又頂點  $C$  在直線  $\overline{AD}$  上，進而說明  $s + 2t = 18$  且  $1 \leq s < 10$ 。

## 附錄

下表為九五課綱數學科各章節，並列出數學甲、數學乙相對應的測驗範圍。各試題解題的主要概念，出自標示「\*\*\*」的章節中；標示「\*\*」的章節不是主要的測驗範圍，但解題時會用到此章節的基本概念或技巧；標示「\*」表示不在該考科的直接命題範圍內，但試題有多種解法時，若用此章節的概念或技巧解題，仍可得分。

### 第一學年

課程標準			測驗範圍	
主題	主要內容	說明	數學甲	數學乙
一、 數與 坐標系	1. 整數	1-1 含因數、倍數與輾轉相除法。	**	**
	2. 有理數與實數	2-1 介紹無理數如 $\sqrt{n}$ 和 $\pi$ ，其中 $n$ 為非完全平方的正整數。含 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明。 2-2 介紹基本的根式運算如 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ， $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ， $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 等。含分母為 $\sqrt{n} \pm \sqrt{m}$ 時的有理化，其中 $n, m$ 為正整數。		
	3. 平面坐標系	3-1 複習平面坐標系，直線方程式，並介紹斜率。 3-2 以兩直線的關係說明二元一次方程組求解的幾何意義。		
	4. 複數與複數平面	4-1 介紹 $i$ 的由來，含一元二次方程式根的討論，特別是判別式小於 0 之情形。 4-2 介紹複數平面和複數的四則運算。複數平面只是強調一一對應關係。		
二、 數列與 級數	1. 等差級數與等比級數	1-1 含數列與級數的基本概念。	**	**
	2. 無窮等比級數與循環小數	2-1 介紹最基本的極限概念。		
	3. 數學歸納法	3-1 介紹數學歸納法並應用於證明。		

課程標準			測驗範圍	
主題	主要內容	說明	數學甲	數學乙
三、 多項式	1.多項式的四則運算	1-1 含綜合除法。	**	***
	2.餘式定理、因式定理	2-1 含整係數多項式的一次因式檢驗法。		
	3.最高公因式與最低公倍式	3-1 利用輾轉相除法求最高公因式。		
	4.多項式函數	4-1 含一次、二次多項式函數的圖形。		
	5.多項式方程式	5-1 含代數基本定理的介紹，勘根定理和實係數多項式方程式虛根成對定理。		
	6.多項式不等式	6-1 瞭解已分解為一次因式乘積的多項式在實數線上恆正、恆負的區間。		
四、 指數與對數	1.指數	4-1 指數與對數互為反函數的意義以公式直接表達，不一定要提反函數這三個字，但要在坐標平面上同時呈現這兩個函數的圖形。  5-1 可用電算器求出指數函數與對數函數的值。	***	***
	2.指數函數及其圖形			
	3.對數			
	4.對數函數及其圖形			
	5.查表、內插法			

課程標準			測驗範圍	
主題	主要內容	說明	數學甲	數學乙
五、三角函數的基本概念	1.銳角三角函數 2.三角函數的基本關係 3.簡易測量與三角函數值表 4.廣義角的三角函數 5.正弦定理與餘弦定理 6.基本三角測量	1-1 先處理有一個銳角為 $30^\circ$ ，或 $45^\circ$ 的直角三角形邊角性質。 2-1 倒數關係、平方關係、商數關係、餘角關係。 3-1 可用電算器求出三角函數值。	***	*
六、三角函數的性質與應用	1.三角函數的圖形 2.和角公式 3.倍角、半角公式 4.正餘弦函數之疊合 5.複數的極式	1-1 含弧度。三角函數的圖形只談正弦、餘弦和正切。 2-1 含積化和差公式。 4-1 以實例說明疊合的意義。 5-1 介紹向徑、輻角與極坐標之概念，含棣美弗定理， $1$ 的 $n$ 次方根。	***	*

第二學年

課程標準			測驗範圍	
主題	主要內容	說明	數學甲	數學乙
一、 向量	1.有向線段與向量	1-1 含向量的加法、減法、係數積與內積等運算。	***	**
	2.向量的基本應用	2-1 含向量在平面幾何證明題上的應用，如三角形兩邊中點連線定理、平行四邊形定理。		
	3.平面向量的坐標表示法	3-1 含加法、減法、係數積與內積等運算以及分點坐標、直線的參數式。		
	4.平面向量的內積	4-1 含柯西不等式、正射影、兩直線的夾角、點到直線的距離。		
二、 空間中的 直線與平面	1.空間概念	1-1 空間中直線與直線、直線與平面、和平面與平面的位置關係。	***	**
	2.空間坐標系			
	3.空間向量的坐標表示法	3-1 含加法、減法、係數積與內積等運算，柯西不等式，正射影。		
	4.平面方程式	4-1 含法向量、平面的夾角、點到平面的距離。	***	*
	5.空間直線方程式	5-1 含直線的參數式、點到直線的距離、平行線的距離、歪斜線的公垂線段長。		
	6.一次方程組	6-1 限二元、三元。 6-2 含高斯消去法。 6-3 以解文字為係數的二元一次方程組介紹克拉瑪公式和二階行列式。 6-4 以二階行列式求平面上平行四邊形的面積。	***	**

課程標準			測驗範圍	
主題	主要內容	說明	數學甲	數學乙
三、 圓與球面的 方程式	1.圓的方程式 2.圓與直線的關係 3.球面方程式 4.球面與平面的關係		***	*
四、 圓錐曲線	1.圓錐曲線名詞的由來 2.拋物線(標準式) 3.橢圓(標準式) 4.雙曲線(標準式) 5.圓錐曲線的光學性質	4-1 含漸近線。	*	*
五、 排列、 組合	1.集合元素的計數 2.加法原理、乘法原理 3.排列 4.組合 5.二項式定理	1-1 含排容原理。    5-1 以組合概念導出。	**	***
	6.遞迴關係	6-1 遞迴關係以 $a_n = \alpha a_{n-1} + f(n)$ 及 $a_n = \beta a_{n-1} + \gamma a_{n-2}$ 的形式為主，其中 $\alpha, \beta, \gamma$ 為常數， $f(n)$ 是次數小於 3 的多項式。	*	*

課程標準			測驗範圍	
主題	主要內容	說明	數學甲	數學乙
六、 機率與統計(I)	1.事件與集合	1-1 集合簡介。 1-2 樣本空間與事件。		
	2.機率的性質		***	***
	3.數學期望值			
	4.統計資料的來源	4-1 觀測研究、抽樣調查、實驗。需介紹及使用亂數表，抽樣調查法需含簡單隨機抽樣法。		
	5.分析一維數據	5-1 圖表編製，數據集中趨勢，數據離散趨勢，整合集中與離散趨勢，以瞭解數據的全貌。	*	***
	6.信賴區間與信心水準的解讀	6-1 常態分配及 68-95-99.7 規律。僅需處理二元資料，不必引進機率模型，以教學活動瞭解信賴區間與信心水準的解讀。		

## 第三學年-數學(I)

課程標準			測驗範圍	
主題	主要內容	說明	數學甲	數學乙
一、 機率與統計 (II)	1.獨立事件、條件機率 與貝氏定理	2-1 需與信賴區間與信心水準的解讀結合。	***	***
	2.數学期望值與二項 分配			
	3.交叉分析	3-1 僅談兩個變數的情況，需與條件機率相結合。	*	***
	4.分析二維數據	4-1 散佈圖、相關係數、迴歸直線與最小平方法。		
二、 矩陣	1.矩陣的加法與係數 積	1-1 強調矩陣的意義，多用實例說明。	***	***
	2.矩陣的乘法及意義	2-1 含乘法的代數性質，轉移矩陣( transition matrix )多用實例說明。		
	3.矩陣的列運算及增 廣矩陣的應用			
	4. 行列式	4-1 限二階與三階，含行列式的基本性質及用行列式表示面積與體積。		
	5. 克拉瑪公式	5-1 限二元，三元。		
	6. 反方陣	6-1 含以列運算求反方陣及二階反方陣之行列式求法。 6-2 以二階反方陣之行列式求法解釋克拉瑪公式。		



課程標準			測驗範圍	
主題	主要內容	主題	數學甲	數學乙
三、不等式	1. 絕對不等式(證明不等式)	1-1 柯西不等式、算幾不等式、應用實例。	***	*
	2. 條件不等式(解不等式)	2-1 以分解因式解一元多項式不等式並在數線上標示解區間。	***	***
		2-2 解二元一次多項式不等式並在坐標平面上標示解區域。		
		2-3 利用代數方法、幾何方法(圖形)，以及絕對不等式求函數在限制條件下的極大、極小。求極值的函數以低次多項式為主。	***	*
3. 線性規劃	3-1 只限二元。	***	***	

第三學年-數學(II)

課程標準			測驗範圍	
主題	主要內容	說明	數學甲	數學乙
一、 多項式函數的極限與導數	1.函數及其圖形  2.極限概念  3.割線與切線  4.導數與切線的斜率	1-1 複習一次函數與直線方程式。 1-2 複習二次函數與拋物線方程式。  2-1 引入 $\Delta x$ 並以直觀說明極限的意義。  3-1 引入 $\Delta y$ 及 $\Delta y/\Delta x$ 討論函數割線的斜率，並說明在運動學上的意義。 3-2 以二次函數說明割線斜率的極限是切線的斜率。 3-3 複習拋物線的光學性質。  4-1 定義導數及切線方程式。 4-2 說明導數在運動學上的意義。 4-3 以二項式定理或分解因式求極限得出多項式的導函數，並介紹導函數常用的符號。	***	不考
二、 導函數的應用	1.函數圖形的描繪  2.函數的極值  3.三次函數的圖形  4.極值的應用	1-1 函數圖形的遞增、遞減和臨界點。 1-2 函數圖形的凹性和反曲點。  2-1 函數極值的一階二階檢定。  3-1 含對三次多項式實根個數的瞭解。	***	不考
三、 多項式函數的積分	1.黎曼和與面積  2.求多項式函數圖形與直線 $x=a$ ， $x=b$ ，和 $y=0$ 圍出的面積  3.定積分及其應用	1-1 直觀說明黎曼和對一再細分的分割所取的極限是面積。 1-2 在等分割時，對 $y=x^2$ 求出黎曼和的極限。  2-1 介紹定積分符號，反導函數(反微分)符號。  3-1 以求圓面積、球體體積、角錐體積、自由落體運動方程式為主。	***	不考