全國公私立高級中學九十八學年度指定科目第六次聯合模擬考試

數學甲考科解析

考試日期：99 年 4 月 8~9 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	5	14	1234	34	124	1	0	1	0	3	0	2	4
16	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**								
2	5	－	2	3	3	2								

第壹部份：選擇題

一、單選題

1. 擲兩顆骰子，點數和 9 點之機率為 $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$，連擲 9 次都不為 9 點之機率為 $(1-\frac{1}{9})^9=(\frac{8}{9})^9$，故選(1)

2. 由算幾不等式：$\dfrac{x+y+y+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}}{6}\ge\sqrt[6]{x\cdot y\cdot y\cdot\frac{z}{3}\cdot\frac{z}{3}\cdot\frac{z}{3}}$

   $\Rightarrow 1\ge\sqrt[6]{\frac{1}{27}x\cdot y^2\cdot z^3}\Rightarrow xy^2z^3\le 27$，

   故 xy^2z^3 之最大值為 27，故選(2)

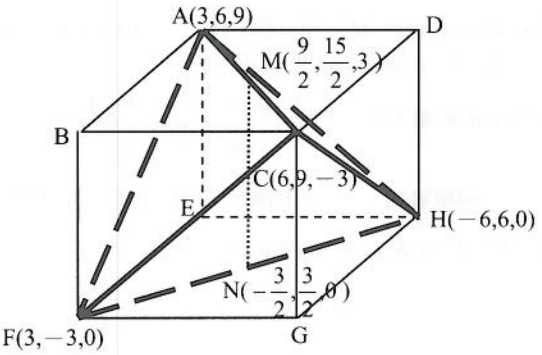
3. 因任兩方程式的 x,y,z 係數皆不成比例，所以三平面沒有重合或平行的情況。

   直接聯立求解 $\begin{cases}2x+y-3z=4 & \text{———— ①}\\ 5x-y+z=-1 & \text{———— ②}\\ 3x-2y+4z=11 & \text{———— ③}\end{cases}$

   由①+③得 $5x-y+z=15$ 與②矛盾，所以無解，故選(5)

二、多選題

4. 如圖，設 S 的四已知頂點為



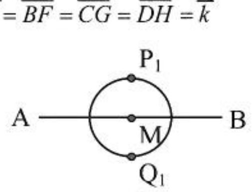
   $A(3,6,9)$, $F(3,-3,0)$, $C(6,9,-3)$, $H(-6,6,0)$

   取 $\overline{AC}$ 中點 $M(\frac{9}{2},\frac{15}{2},3)$，$\overline{FH}$ 中點 $N(-\frac{3}{2},\frac{3}{2},0)$，

   令 $\vec{k}=\overrightarrow{MN}=(-6,-6,-3)$ 則由 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{DH}=\vec{k}$

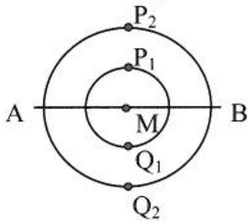
   可得 $E(-3,0,6)$, $B(9,3,3)$, $G(0,3,-6)$, $D(0,12,3)$ 故選(1)(4)

5. (1)如圖，甲乙在 P_1、M、Q_1 相遇的機率皆為 $(\frac{1}{3})^2$，



   所以 $P(1)=1-3(\frac{1}{3})^2=\frac{2}{3}$

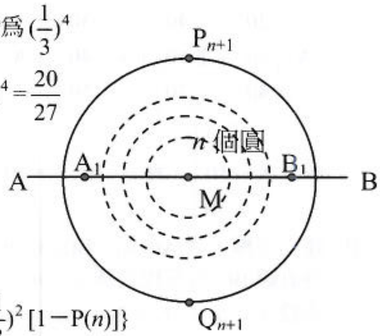
   (2)如圖，甲乙在 P_2、Q_2 相遇的機率皆為 $(\frac{1}{3})^2$；



   在 P_1、M、Q_1 相遇的機率皆為 $(\frac{1}{3})^4$

   所以 $P(2)=1-2(\frac{1}{3})^2-3(\frac{1}{3})^4=\frac{20}{27}$

   (3)如圖，甲乙在 P_{n+1}、Q_{n+1} 相遇的機率皆為 $(\frac{1}{3})^2$；



   甲經 A_1 且乙經 B_1 後兩人相遇的機率為 $1-P(n)$

   所以 $P(n+1)=1-\{2(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^2[1-P(n)]\}$

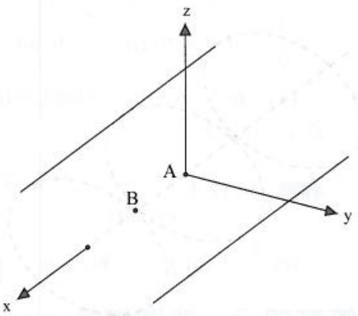
   $=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}P(n)$

   (4)由(1)(3)可得 $P(n)=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}+(\frac{1}{9})^2\cdot\frac{2}{3}+\dots+(\frac{1}{9})^{n-1}\cdot\frac{2}{3}$

   $=\frac{2}{3}+\dfrac{\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}[1-(\frac{1}{9})^{n-1}]}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}-\frac{1}{12}(\frac{1}{9})^{n-1}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}P(n)=\frac{3}{4}$。

   故選(1)(2)(3)(4)

6. 因 ΔPAB 的面積等於 30，又 $\overline{AB}=5$，所以 P 點到直線 AB 的距離為 12，而所有的 P 點所形成的圖形 Γ 是以直線 AB 為中心軸的圓柱面(如圖)。



   且 Γ 與 xy 平面、zx 平面的交集都是兩平行直線；而與 yz 平面交於一圓。故選(3)(4)

7. (1)正確：$\log_{\frac{3}{2}}20>\log_{\frac{3}{2}}\frac{243}{32}=5$

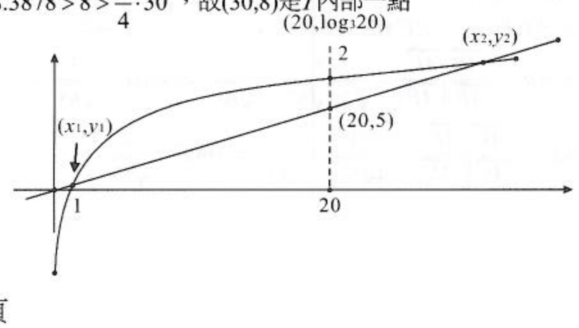
   (2)正確：因為 $\log_{\frac{3}{2}}2>\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{2}=1>\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\cdot 2$，故 $1<x_1<2$

   (3)錯誤：$\log_{\frac{3}{2}}36=\dfrac{\log 36}{\log\frac{3}{2}}=\dfrac{2(\log 2+\log 3)}{\log 3-\log 2}$

   $=\dfrac{1.5562}{0.1761}\fallingdotseq 8.837<\frac{1}{4}\cdot 36$，故 $x_2<36$

   (4)正確：$\log_{\frac{3}{2}}30=\dfrac{\log 30}{\log\frac{3}{2}}=\dfrac{1+\log 3}{\log 3-\log 2}=\dfrac{1.4771}{0.1761}\fallingdotseq$

   $8.3878>8>\frac{1}{4}\cdot 30$，故(30,8)是 Γ 內部一點



三、選填題

A. 因爲 AX= $\begin{bmatrix}1\\20\\300\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\10\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\0\\100\end{bmatrix}$

$=A\begin{bmatrix}20\\30\\40\end{bmatrix}+2\left(A\begin{bmatrix}40\\50\\70\end{bmatrix}\right)+3\left(A\begin{bmatrix}-30\\-40\\-50\end{bmatrix}\right)$

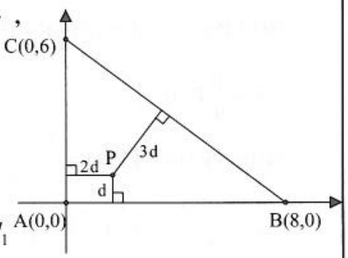
$=A\left(\begin{bmatrix}20\\30\\40\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}40\\50\\70\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-30\\-40\\-50\end{bmatrix}\right)=A\begin{bmatrix}10\\10\\30\end{bmatrix}$

所以 X= $\begin{bmatrix}10\\10\\30\end{bmatrix}$，即 $a=10$，$b=10$，$c=30$

B. 建立坐標，令 A(0,0)、B(8,0)、C(0,6),
得直線 BC 的方程式爲 $3x+4y-24=0$
假設 $d_1=d$ 、 $d_2=2d$ 、 $d_3=3d$ ，
則 P 的坐標爲(2d , d)，
由 d(P, $\overleftrightarrow{BC}$)=3d

$\Rightarrow \dfrac{|3\cdot 2d+4\cdot d-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3d$

$\Rightarrow -\dfrac{10d-24}{5}=3d \Rightarrow d=\dfrac{24}{25}=d_1$



另解：由 $\Delta PAB+\Delta PAC+\Delta PBC=\Delta ABC$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot d+\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 2d+\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 3d=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 6 \Rightarrow d=\dfrac{24}{25}$

C. $f'(x)=6x^2-6x+a$，切線 L 的斜率 $=f'(0)=a$，故 L 的方程式爲 $y=ax+3$ 。

解聯立方程式 $\begin{cases} y=2x^3-3x^2+ax+3 \\ y=ax+3 \end{cases} \Rightarrow x=0,0,\dfrac{3}{2} \Rightarrow b=\dfrac{3}{2}$ 。

已知($\dfrac{3}{2}$, 2)是 L 上一點 $\Rightarrow 2=a\cdot\dfrac{3}{2}+3 \Rightarrow a=-\dfrac{2}{3}$

第貳部分：非選擇題

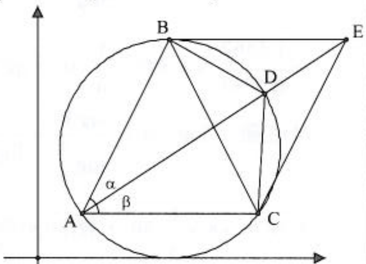
一. 1. 設此圓方程式爲 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ ：
將 A(1 , 1)、B(3 , 5)、C(5 , 1)代入

得 $\begin{cases} 1+1+d+e+f=0 \\ 9+25+3d+5e+f=0 \\ 25+1+5d+e+f=0 \end{cases} \Rightarrow d=-6, e=-5, f=9$ 。

此圓方程式爲 $x^2+y^2-6x-5y+9=0$ (至此得 3 分)

$\Rightarrow (x-3)^2+(y-\dfrac{5}{2})^2=(\dfrac{5}{2})^2$

故半徑爲 $\dfrac{5}{2}$ 。(再得 3 分)



2. $\overrightarrow{AB}=(2,4)$ 、 $\overrightarrow{AC}=(4,0)$ ，
設 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ ，
則 $\overrightarrow{AE}=(6,4)$ 。
設 $\angle BAD=\alpha$ 、 $\angle CAD=\beta$ ，

則 $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|}=\dfrac{28}{\sqrt{20}\sqrt{52}}=\dfrac{7}{\sqrt{65}} \Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{65}}$ ；

$\cos\beta=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AE}|}=\dfrac{24}{4\sqrt{52}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \sin\beta=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ 。

由正弦定理， $\overline{BD}:\overline{CD}=\sin\alpha:\sin\beta=\dfrac{4}{\sqrt{65}}:\dfrac{2}{\sqrt{13}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (7 分)

另解：由 $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC} \Rightarrow D(6t+1,4t+1)$

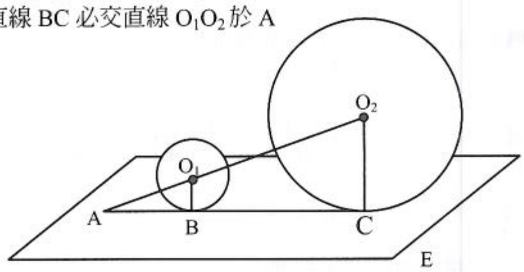
代入圓的方程式，解得 $t=\dfrac{9}{13}$ ，故 $D(\dfrac{67}{13},\dfrac{49}{13})$ (得 3 分)

$\Rightarrow \overline{BD}=\dfrac{4\sqrt{65}}{13}$ (得 1 分)

$\overline{CD}=\dfrac{2\sqrt{325}}{13}$ (得 1 分)

故 $\overline{BD}:\overline{CD}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (再得 2 分)

二. 如圖，S_1、S_2 的球心分別爲 $O_1(0,0,0)$、$O_2(2,-5,3)$，
直線 O_1O_2 交 E 於 A , O_1、O_2 在 E 上的投影點分別爲 B、C，
則直線 BC 必交直線 O_1O_2 於 A



$\because \Delta AO_1B \sim \Delta AO_2C \quad \therefore \dfrac{\overline{AO_1}}{\overline{AO_2}}=\dfrac{\overline{O_1B}}{\overline{O_2C}}=\dfrac{S_1\text{半徑}}{S_2\text{半徑}}=\dfrac{1}{3}$

由外分點公式知

$A(\dfrac{-1\cdot 2+3\cdot 0}{-1+3},\dfrac{-1\cdot(-5)+3\cdot 0}{-1+3},\dfrac{-1\cdot 3+3\cdot 0}{-1+3})$

$=(-1,\dfrac{5}{2},-\dfrac{3}{2})$(至此得 4 分)又 $\overleftrightarrow{AP}$ 的方向向量(0,1,1)，

所以 $\overleftrightarrow{AP}$ 可由兩平面 $x+1=0$, $\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z}{1}$ (即 $y-z-4=0$)

相交而成，因爲 E 包含 $\overleftrightarrow{AP}$，所以設 E： $y-z-4+k(x+1)=0$ (即 $kx+y-z+k-4=0$)或 $x+1=0$ ，(再得 3 分)

利用 O_1 到 E 的距離等於 1，列式 $\dfrac{|k\cdot 0+0-0+k-4|}{\sqrt{k^2+1^2+(-1)^2}}=1$，

解得 $k=\dfrac{7}{4}$ 且經檢驗知 $x+1=0$ 亦滿足，所以 E 的方程式爲

$7x+4y-4z-9=0$ 或 $x+1=0$ (各再得 3 分)